풀이

STEP II 2009, 문제 3

순수수학 • 삼각함수 항등식과 무리수

> **STEP II 2009, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q3

핵심 아이디어

항등식(identity) $(*)$는 각 x에서 알고 있는 탄젠트(tangent)를 각 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$에서의 탄젠트로 바꾸어 준다. 이 새 각은 원래 각의 대략 절반 크기이다. 따라서 이 항등식은 반각(half-angle)을 만들어 내는 장치 역할을 한다. 핵심은 원하는 각에 정확히 도달하도록 출발 각 x를 고르는 데 있다. 그다음부터는 근호식(surd)을 조심스럽게 계산하는 일, 즉 유리화(rationalising)하고 전개하고 제곱하는 일만 남는다.

풀이

$(*)$의 증명

$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$로 두면 $x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$이다. 그러면

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

따라서 양변이 모두 정의되는 곳에서(즉 $\cos x \neq 0$일 때)

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

$\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$이면 반드시 $\sin\theta \neq 0$이므로 $\sin\theta$로 약분할 수 있다. 이로써 $(*)$가 증명된다.

소문항 (i)

$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$가 되기를 원하므로 $x = \frac{1}{4}\pi$이다. $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$이고 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이므로

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

두 번째 결과를 얻기 위해 $\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$임에 주목하자. 또 $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$임을 알고 있다. 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\tan\tfrac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

항이 세 개인 분모를 유리화하기보다는 다음을 보이는 편이 더 빠르다.

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$과 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$를 이용하여 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$에 첫 번째 괄호의 각 항을 차례로 곱하면

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

이제 같은 종류의 항끼리 모은다. 상수항은 $2+3-6=-1$이다. $\sqrt{2}$항은 $1-3+3=1$이다. $\sqrt{3}$항은 $2-2+1=1$이다. $\sqrt{6}$항은 $-2+1+1=0$이다. 합은 $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$이다. 분모 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$은 0이 아니므로 이것으로 나눌 수 있고,

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

? **생각해 보기** 마지막 소문항에서는 $(*)$에 어떤 x 값을 넣어야 할까?

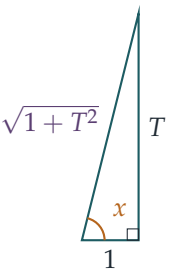
$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$가 되어야 하므로 $\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$이고 $x = \frac{11}{24}\pi$이다. 이것은 바로 (i)과 (ii)에서 탄젠트 값을 구한 각이다.

소문항 (iii)

$T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$이라 하자. $x = \frac{11}{24}\pi$로 두고 $(*)$를 적용하면

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sec\tfrac{11}{24}\pi - T.$$

시컨트(secant)에 대해서는 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$이다. $0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$이므로 코사인 값이 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 택하여 $\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$이다. 아래 삼각형도 같은 사실을 보여 준다.



T를 제곱하면 네 항 각각의 제곱의 합은 $4+2+3+6=15$이다. 교차항(cross terms)의 합은

$$2(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}) = 2(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = 10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

따라서 $1+T^2 = 16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$이고, 그러므로

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}} - 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6},$$

이 되어 요구하는 결과를 얻는다.

검산

- $\sqrt{2}-1 \approx 0.41421$이고, 이는 $\tan 22.5^\circ$와 일치한다.
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \approx 7.59575$이고, 이는 $\tan 82.5^\circ$와 일치한다. (i)의 분수도 같은 값을 준다.
- 최종 식은 $\sqrt{57.45\ldots} - 7.59575 \approx 0.0655435$이고, 이는 $\tan 3.75^\circ \approx 0.0655435$와 일치한다.
- $(*)$의 간단한 확인: $x=0$에서 양변은 모두 1이고, $x=\frac{1}{3}\pi$에서 양변은 모두 $2-\sqrt{3} = \tan\frac{1}{12}\pi$이다.

흔한 실수

- $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$를 잘못 풀어 $x=\frac{11}{48}\pi$를 사용하는 것. $\frac{1}{2}$을 되돌려 주어야 한다.
- 항이 네 개인 근호식을 제곱할 때 교차항을 빠뜨리는 것. 교차항은 여섯 개이고, 각각 두 배가 된다.
- 양의 제곱근이 왜 옳은지 설명하지 않고 $\sec x = \sqrt{1+\tan^2 x}$로 두는 것.

STEP 너머

이처럼 각을 거듭 반으로 나누는 방법으로 $\tan\frac{\pi}{48}$과 같은 정확한 값을, 중첩된 제곱근까지 포함하여 쌓아 올릴 수 있다. 이것은 어떤 정다각형(regular polygon)을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는가라는 고전적인 질문의 대수적 측면이다. 가우스(Gauss)는 그 답이 $\cos\frac{2\pi}{n}$을 제곱근만으로 나타낼 수 있는지에 달려 있음을 보였고, 갈루아 이론(Galois theory)은 그 이유를 설명해 준다. 이 이야기의 언어인 체(field)와 체의 확대(field extension)를 처음 접해 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.