풀이

STEP II 2009, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기와 근사

STEP II 2009, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q2

핵심 아이디어

$a > 1$이므로 함수 a^u는 u에 대하여 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 y는 $\sin(\pi e^x)$가 가장 클 때 정확히 가장 크고, 가장 작을 때 정확히 가장 작다. 그러므로 곡선의 모든 성질은 안쪽 함수 πe^x에서 나온다. 이 함수는 꾸준히 증가하면서 사인의 봉우리와 골짜기를 차례로 지나가는데, 그 점들은 x가 커질수록 점점 더 촘촘하게 모인다. 넓이의 경우에는 사다리꼴(trapezium)들의 양 끝 높이가 같으므로, 합이 로그의 차 하나로 줄어든다.

풀이

소문항 (i)

양변에 로그를 취하면 $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$이다. 음함수 미분(implicit differentiation)을 하면

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{이므로} \qquad \frac{dy}{dx} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x) \, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

여기서 $\ln a > 0$이고($a > 1$이므로) $e^x > 0$, $a^{\sin(\pi e^x)} > 0$이므로, 도함수(derivative)가 영이 되는 것은 정확히 $\cos(\pi e^x) = 0$일 때, 즉 πe^x가 $\frac{\pi}{2}$의 홀수배일 때이다. $\pi e^x > 0$이므로 양의 홀수배만 가능하다.

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

이 점들에서 $\sin(\pi e^x) = \sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$이므로 $y = a^{(-1)^n}$이다. 정류점(stationary point)은 다음과 같다.

$$\left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\ a\right) \ (n \text{ 짝수}), \qquad \left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ 홀수}).$$

첫 번째 무리는 극대점(maximum)이고 두 번째 무리는 극소점(minimum)이다. a^u가 증가하므로 모든 x에 대하여 $y \le a^1 = a$이고 $y \ge a^{-1}$이다. 따라서 $y = a$인 점은 최댓값(global maximum)을 갖는 점이고, $y = 1/a$인 점은 최솟값(global minimum)을 갖는 점이다. 구체적으로 극대점은 $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$에 있고, 극소점은 $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$에 있다

소문항 (ii)

x가 작을 때 $e^x \approx 1 + x$이므로

$$\sin(\pi e^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

이다. 여기서 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$를 쓰고, 이어서 $t = \pi x$가 작으므로 $\sin t \approx t$를 썼다. 따라서

$$y \approx a^{-\pi x} = e^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

이다. 마지막 단계에서는 다시 $e^t \approx 1 + t$를 쓰는데, 이번에는 작은 양 $t = -\pi x \ln a$에 대해서이다. 이것이 구하는 근사이다. 즉 곡선은 $x = 0$에서 기울기 $-\pi \ln a$로 직선 $y = 1$을 가로지른다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\sin t \approx t$를 $\sin(\pi e^x)$에 바로 넣을 수 없을까?

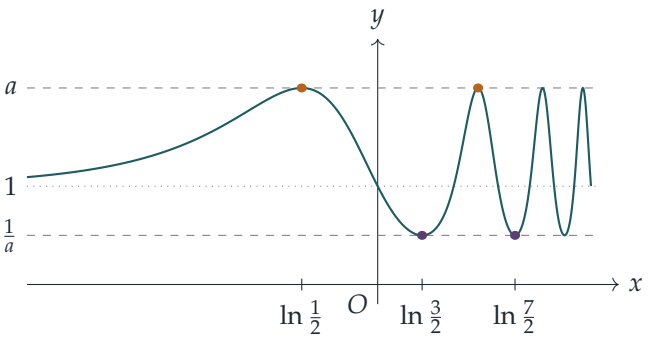
x가 작을 때 πe^x는 0이 아니라 π에 가깝기 때문이다. 먼저 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$를 써서 작은 양 πx를 사인의 인수(argument)로 옮겨야 한다.

소문항 (iii)

그래프에 나타낼 몇 가지 특징은 다음과 같다.

- $x \to -\infty$일 때 $e^x \to 0$이므로 $\sin(\pi e^x) \to 0$이고, $y \to 1$이며 위쪽에서 다가간다($x < \ln\frac{1}{2}$이면 $0 < \pi e^x < \frac{\pi}{2}$이므로 사인이 양수이고 $y > 1$이다). 직선 $y = 1$은 왼쪽의 점근선(asymptote)이다.
- 곡선은 $x = \ln\frac{1}{2}$에서 첫 번째 극댓값 a까지 올라간 뒤, a와 $1/a$ 사이에서 끝없이 진동하며 항상 x축 위에 있다.
- 곡선은 e^x가 양의 정수인 곳, 즉 $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$에서 $y = 1$을 가로지르며, 소문항 (ii)에 의해 $x = 0$에서의 기울기는 $-\pi \ln a$이다.
- 이웃한 정류점 사이의 간격은 $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$이므로, x가 커질수록 진동이 점점 빨라진다.

그림은 $a = 2$인 경우이다.



소문항 (iv)

극대점을 왼쪽부터 세어 보자. k번째 극대점은 $n = 2(k-1)$에 해당하므로 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$인 곳에 있다. $(k+1)$번째 극대점은 $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$인 곳에 있고, 그 사이에 있는 유일한 극소점은 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$인 곳에 있다. 다음과 같이 놓자.

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

(x_1, a)와 $(x_2, \frac{1}{a})$를, 그리고 $(x_2, \frac{1}{a})$와 (x_3, a)를 선분으로 이으면, x축까지의 영역은 두 개의 사다리꼴로 나뉘고, 각 사다리꼴의 평행한 두 변은 a와 $\frac{1}{a}$이다. 따라서 근사 넓이는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

이다. 마지막으로 $\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$이므로 넓이는 근사적으로

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 극소점의 위치 x_2가 완전히 소거된다는 점에 주목하자. 중요한 것은 두 극대점뿐이다.

검산

- 수치 미분으로 확인하면, $[-6, \ln 8]$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$인 곳은 $n = 0, \ldots, 7$에 대한 $x = \ln(n + \frac{1}{2})$뿐이고, $x = 0$에서의 기울기는 $-\pi \ln a$이다($a = 2$일 때 둘 다 -2.1776이다).
- $a = 2, k = 1$일 때 공식은 $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$를 주고, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 실제 넓이는 1.954이다. 근사로서 충분히 가깝다. 사다리꼴은 넓이를 약간 과대평가하는데, 곡선이 극소점 근처에서 현(chord) 아래로 처지는 정도가 극대점 근처에서 현 위로 부푸는 정도보다 크기 때문이다.

- $k \to \infty$일 때 넓이는 0으로 수렴하며, 이는 점점 좁아지는 진동과 들어맞는다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\frac{\pi}{2}$의 음의 홀수배까지 포함하는 것. πe^x는 항상 양수이다.
- 극대점의 번호를 $k = 1$이 아니라 $k = 0$부터 매기는 것. 그러면 답이 $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$로 밀린다.
- 소문항 (ii)에서 마지막 선형화(linearisation) $e^t \approx 1 + t$를 하지 않고 $a^{-\pi x}$에서 멈추는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 더 간단한 전개들을 합성하여 얻은 1차 테일러 전개(Taylor expansion)이며, 이는 대학생들이 합성함수(composite function)의 전개를 다루는 방식 그대로이다. k가 클 때 진동 한 번에 해당하는 실제 넓이는 대략 $(x_3 - x_1)$에 한 주기에 걸친 $a^{\sin\theta}$의 평균을 곱한 값이며, 이 적분은 변형 베셀 함수(modified Bessel function) $I_0(\ln a)$로 이어진다. 이것을 $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$와 비교해 보는 것은 이런 곡선에서 사다리꼴 공식(trapezium rule)이 왜 과대평가하는지 이해하는 좋은 연습이 된다. 근사와 테일러 정리를 꼼꼼히 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.