풀이

STEP II 2009, 문제 11

역학 • 일률과 저항

> **STEP II 2009, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q11

핵심 아이디어

열차 전체를 질량 $(n+1)M$, 전체 저항(resistance) $(n+1)R$인 하나의 물체로 본다. 일률(power) P로 달릴 때 속력 v에서의 구동력은 P/v이므로, 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)으로 가속도를 곧바로 얻는다. 어떤 속력에 도달하는 데 걸리는 시간을 구하려면 가속도를 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$로 쓰고, 변수를 분리(separation of variables)하여 적분한다. 마지막 소문항은 에너지 수지를 따지는 문제이다. 기관차가 한 일은 운동 에너지(kinetic energy)와 저항을 이기는 일로 나뉜다.

풀이

기관차와 화차들을 함께 움직이는 입자로 모형화한다(연결 장치는 팽팽하고 늘어나지 않는다). 그러면 열차는 하나의 물체가 된다. 전체 질량과 전체 저항을 각각

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

로 쓴다.

가속도

일률은 힘과 속력의 곱이므로, 최대 일률에서 속력이 v일 때 기관차의 견인력(tractive force)은 P/v이다. 선로 방향으로 힘을 분해하여 열차 전체에 뉴턴 제2법칙을 적용하면

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{따라서} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

이다.

속력 V에 도달하는 시간

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$로 놓고 변수를 분리하면

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P-kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

이다. 적분하기 위해 분자를 분모로 나타내어 $v = \frac{1}{k}(P-(P-kv))$로 쓰고 분수를 쪼개면

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

이다. 따라서

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1-\frac{kV}{P}\Big).$$

이다. $m/k = M/R$이고 $m/k^2 = M/((n+1)R^2)$이므로

$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1-\frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

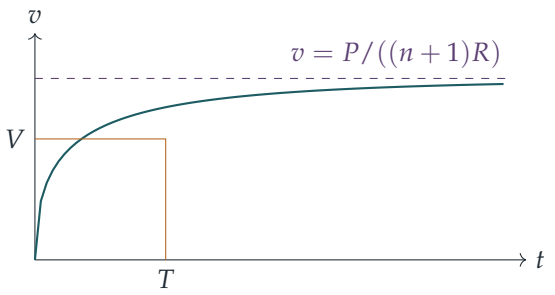
이다.

> **생각해 보기** P가 $(n+1)RV$보다 커야 하는 것이 단지 로그가 정의되기 위한 조건이 아니라 왜 꼭 필요한 조건일까?

물리적으로 보면, 가속도 $(P-kv)/(mv)$는 $v < P/k$인 동안 양수이고 $v = P/k$에서 0이 된다. 열차는 $v = 0 < P/k$에서 출발하여 속력이 증가하지만, v가 P/k에 가까워질수록 가속도는 사그라든다. 위의 식은 열차가 그 속력에 결코 도달하지 못함을 보여 준다. $V \to P/k$로 아래쪽에서 다가가면 $\ln(1-kV/P) \to -\infty$이므로 $T \to \infty$이다. 즉 P/k는 열차가 다가가기는 하지만 유한한 시간 안에 도달하지는 못하는 종단 속력(terminal speed)이며, 그 이상의 속력에는 결코 이르지 못한다. 따라서 속력 V에 도달할 수 있으려면 $V < P/k$, 즉

$$P > (n+1)RV,$$

이어야 한다. 이것이 증명할 내용이었다. (같은 말이지만, $P \le kV$라면 기관차가 최대 일률로 달려도 속력 V에서의 저항조차 상쇄하지 못한다.)



(이 그림은 정성적인 개형이다. 구동력 P/v가 큰 처음에는 속력이 가파르게 증가하다가, 종단 속력을 향해 점점 완만해진다.)

소문항 (i)

$x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$로 놓으면 x는 작다. 이때 $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$이고, $V = Px/k$를 이용하면

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}\,x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}\,x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

이다. 일차항들이 정확히 상쇄되므로 x^2항까지 필요했던 것이다. 따라서

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

이다. **해석.** PT는 시간 T 동안 기관차가 한 일이고, $\frac{1}{2}(n+1)MV^2$은 열차가 얻은 운동 에너지이다. 그러므로 $(n+1)RV$가 P에 비해 작을 때(저항력과 속력의 곱이 기관차의 일률에 비해 작을 때), 기관차가 한 일은 거의 모두 운동 에너지가 되고 저항으로 잃는 양은 아주 적다. 즉 열차는 마치 저항이 없는 것처럼 움직인다.

소문항 (ii)

시간 T 동안 일정한 일률 P로 작동하는 기관차는 PT만큼의 일을 한다. 거리 X를 가는 동안 일정한 전체 저항 $(n+1)R$이 한 일은 $-(n+1)RX$이다. 다시 말해 열차가 저항을 이기며 한 일은 $(n+1)RX$이다. 열차는 정지 상태에서 출발하여 속력 V에 이르고, 선로가 수평이므로 위치 에너지의 변화는 없다. 일-에너지 원리(work–energy principle)에 의해

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

이다. 이를 정리하면

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 이는 소문항 (i)과도 들어맞는다. 저항을 무시할 수 있으면 $(n+1)RX$항이 사라지고 $PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$만 남는다.

검산

- $n = 3$, $M = 2$, $R = 1$, $P = 40$, $V = 6$으로 잡자(그러면 $(n+1)RV = 24 < 40$이다). 공식에 따르면 $T \approx 6.3258$이고, 이어서 $X \approx 27.258$이다. 운동 방정식을 시간에 따라 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가도 유효숫자 네 자리까지 같은 값이 나온다.
- 차원: MV/R은 (질량)(속력)/(힘)이므로 시간의 차원을 가지며, MP/R^2도 마찬가지이다. 로그는 무차원이다.

- $V \to P/\big((n+1)R\big)$이면 T는 한없이 커진다(위의 수치에서 종단 속력의 90%, 99%, 99.9%일 때 각각 $T \approx 28, 72, 118$이다). 이로써 조건이 확인된다.
- x가 작을 때 비 $PT/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$은 약 $1+\frac{2}{3}x$이고 1로 다가간다. 소문항 (i)의 예측과 같다.

흔한 실수

- 열차 전체가 아니라 기관차만의 질량과 저항을 쓰는 실수. 기관차는 $n+1$대의 차량 전부를 끈다.
- 시간을 구해야 하는데 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓰거나 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$를 쓰는 실수. 이 방법으로는 시간이 아니라 거리가 나온다.
- 소문항 (i)에서 로그를 일차까지만 전개하는 실수. x항들이 상쇄되어 $T \approx 0$이 되고 답을 잃는다.

STEP 너머

방정식 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$는 일계 비선형 상미분방정식(ODE)인데 마침 변수분리가 가능한 꼴이다. 종단 속력 P/k는 안정 평형점(stable equilibrium)으로, 해는 이 값에 다가가지만 유한한 시간 안에 도달하지는 못한다. 해의 유일성(uniqueness)이 보여 주듯, 이는 매끄러운 상미분방정식의 평형점 근처에서 전형적으로 나타나는 현상이다. 소문항 (ii)는 일-에너지 정리로, 대학 역학에서 전체를 꿰는 핵심 원리가 된다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를, 상미분방정식 쪽은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.