풀이

STEP II 2009, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP II 2009, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q10

핵심 아이디어

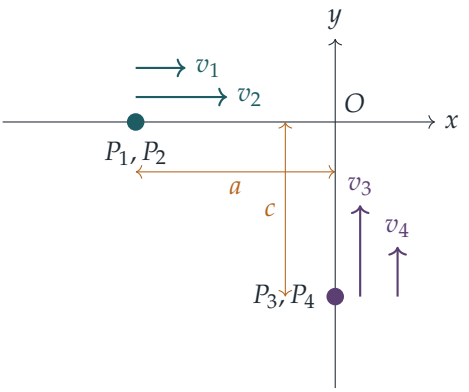
충돌(collision)은 네 번 일어나지만, 역학이 필요한 것은 처음 두 번뿐이다. 이 두 충돌이 직후의 네 속력을 결정한다. 나머지는 모두 시간 계산이다. 서로 다른 축을 따라 움직이는 두 입자(particle)가 "O에서 충돌한다"는 것은 단지 같은 순간에 O에 도달한다는 뜻이므로, 이후의 각 충돌은 거리/속력 = 거리/속력 꼴의 방정식을 하나씩 준다. 한 시간 방정식을 다른 시간 방정식으로 나누면 미지의 거리가 소거되고, 질량에 대한 조건만 남는다.

풀이

설정하기

네 물체를 매끄러운 축 위에서 움직이는 입자로 모형화하므로, 충돌과 충돌 사이에 각 입자는 일정한 속도로 움직인다. P_2가 음의 x축 위에서 O로부터 거리 a인 곳에서, P_3이 음의 y축 위에서 O로부터 거리 c인 곳에서 출발한다고 하자. $a = c$임을 보여야 한다.

처음 두 (동시에 일어나는) 충돌의 순간을 $t = 0$으로 잡자. 이 충돌은 P_2와 P_3이 놓여 있는 곳에서 일어나므로, $t = 0$일 때 입자 P_1과 P_2는 모두 O로부터 거리 a에 있고, P_3과 P_4는 모두 O로부터 거리 c에 있다.



처음 두 충돌

속력 u로 움직이는 질량 M인 입자가 정지해 있는 질량 m인 입자와 반발계수(coefficient of restitution) e로 정면 충돌(direct impact)하고, 충돌 후 처음 운동 방향으로의 속도가 각각 V와 w라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 의해

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

이므로

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

이를 P_1이 P_2와 충돌하는 경우와 P_4가 P_3과 충돌하는 경우에 적용하면, $t = 0$ 직후 O를 향하는 속도는

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

이다. 분명히 $v_2, v_3 > 0$이다. P_1과 P_4도 나중에 O에 도달하므로 여전히 O를 향해 움직이고 있어야 하고, 따라서 $v_1 > 0, v_4 > 0$이기도 하다.

이후의 충돌 이용하기

생각해 보기 서로 수직인 축 위의 두 입자가 어떻게 "충돌"할 수 있을까?

두 축이 공유하는 점은 O뿐이다. 따라서 "P_2와 P_3이 O에서 충돌한다"는 것은 단지 두 입자가 같은 시각에 O에 도착한다는 뜻이고, P_1과 P_4도 마찬가지이다. $t = 0$부터 O에 도착할 때까지 각 입자는 일정한 속력으로 움직이므로(문제에서 이들 중 어느 입자든 관여하는 다음

충돌은 O에서 일어난다고 하였다), 도착 시각은 거리를 속력으로 나눈 것이다.

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2\text{와}P_3\text{이 만나는 점은}O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1\text{과}P_4\text{가 만나는 점은}O). \tag{2}$$

(1)을 (2)로 나누면 거리가 소거된다.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

위의 식에서 각 비의 인수 u와 $m_1 + m_2$(또는 $m_3 + m_4$)가 약분되므로, 이 식은

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

를 뜻하고, 양변에 $m_1 m_4(1+e)$를 곱하면

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{따라서} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

이다. $e > 0$이므로 e로 나눌 수 있고, 따라서 $m_1 m_3 = m_2 m_4$, 즉

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ 라 하자.}$$

이제 v_2와 v_3으로 돌아가자. 분자와 분모를 각각 m_2와 m_3으로 나누면

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

이다. 따라서 P_2와 P_3은 처음 충돌 후 같은 속력으로 떠나고, (1)에 의해 $a = c$이다. 그러므로 P_2와 P_3은 처음에 O로부터 같은 거리에 있었다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 3, m_4 = 6$ (따라서 $k = 2$), $e = \frac{1}{2}$, $u = 1$, $a = c = 1.7$로 잡자. 그러면 $v_2 = v_3 = 1$, $v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$이다. P_2와 P_3은 $t = 1.7$에 함께 O에 도달하고, P_1과 P_4는 $t = 3.4$에 함께 도달하는데, 문제에서 말한 대로 더 나중이다. 단계별 시뮬레이션도 이와 일치한다.
- $v_2 - v_1 = eu > 0$이므로 P_1은 실제로 P_2보다 늦게 도착하며, 이는 "얼마 후에"라는 조건과 들어맞는다.
- $e = 0$이면 논증이 깨지는데, 당연히 그래야 한다. 이때 $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$이므로 (2)는 (1)과 같은 식이 되고, $a/c = v_2/v_3$을 만족하는 어떤 a와 c든 성립한다. 바로 이 때문에 문제에서 $e > 0$을 고집하는 것이다.

흔한 실수

- P_1의 이동 거리를 처음 출발점부터 재는 것. $t = 0$ 이후 P_1은 P_2가 있던 곳, 즉 O로부터 거리 a인 곳에서 출발한다. 그래서 (1)과 (2)에 같은 a가 나타난다.
- 아무 언급 없이 e로 나누는 것. $e = 0$인 경우는 정말로 다르다.
- O에서 일어나는 P_2와 P_3의 충돌을 분석하려 하는 것. 그 결과에 대해서는 아무것도 필요하지 않고, 두 입자가 함께 그곳에 도착한다는 사실만 필요하다.

STEP 너머

질량 조건 $m_1 m_3 = m_2 m_4$는 두 충돌이 서로의 축소·확대판이라는 뜻이다. 정면 충돌 후의 속도는 질량비와 e에만 의존하는데, 이는 차원 분석(dimensional analysis)과 상사(similarity)를 처음 엿보는 것이다. 대학에서는 충돌을 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 것이 가장 깔끔한데, 이 좌표계에서 반발계수는 단순히 상대 속도의 크기를 바꾸는 배율이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 운동량과 충돌을 이런 방식으로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.