풀이

STEP II 2009, 문제 1

순수수학 • 곡선의 대칭성

> **STEP II 2009, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q1

핵심 아이디어

여기서는 계산할 것이 거의 없다. 대칭(symmetry)이 모든 일을 해 준다. 두 곡선 모두 직선 $y = x$와 $y = -x$에 대한 반사(reflection)로 변하지 않으므로, 교점(intersection point)을 하나만 찾으면 나머지는 그 점을 반사하여 얻는다. 그러면 직사각형(rectangle)이라는 사실은 네 점의 배치에서 바로 나온다. 넓이를 구할 때에도 α와 β 자체를 구할 필요는 전혀 없다. 답에 필요한 것은 이 둘의 조합 하나뿐이며, 그것은 $\alpha^4 + \beta^4 = u$와 $\alpha\beta = v$에서 곧바로 얻을 수 있다.

풀이

대칭축

곡선 위의 임의의 점을 어떤 직선에 대하여 반사한 점이 다시 곡선 위에 있으면, 그 곡선은 그 직선에 대하여 대칭이라고 한다. 우리에게 필요한 네 가지 반사는

$$(x,y) \mapsto (-x,y), \quad (x,y) \mapsto (x,-y), \quad (x,y) \mapsto (y,x), \quad (x,y) \mapsto (-y,-x),$$

이며, 각각 $x = 0, y = 0, y = x, y = -x$에 대한 반사이다.

곡선 $x^4 + y^4 = u$. 네제곱은 부호와 무관하고 식이 x와 y에 대하여 대칭이므로, $x^4 + y^4$는 네 사상 모두에 대하여 변하지 않는다. 따라서 이 곡선은 다음 네 개의 대칭축(line of symmetry)을 가진다.

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

곡선 $xy = v$. x와 y를 맞바꾸어도 xy는 변하지 않고, $(-y)(-x) = xy$이므로 $(x,y) \mapsto (-y,-x)$에 대해서도 변하지 않는다. 한 좌표의 부호만 바꾸면 xy는 $-xy$가 되는데,

$v > 0$이므로 점 $(-x, y)$는 우리 곡선이 아니라 $xy = -v$ 위에 놓인다. 따라서 이 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 대칭축은 정확히 두 개이다.

$$y = x, \qquad y = -x.$$

네 교점

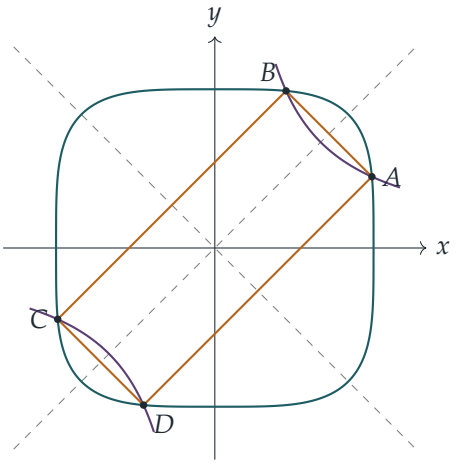
$y = x$에 대한 반사를 S, $y = -x$에 대한 반사를 T라 하자. 각각은 두 곡선을 모두 자기 자신으로 보내므로, 교점을 교점으로 보낸다. $A = (\alpha, \beta)$에서 출발하면

$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

를 얻는다. $\alpha > \beta > 0$이므로 이 네 점은 서로 다르다. 다른 교점은 없다. 사차곡선(quartic)의 식에 $y = v/x$를 대입하면 $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$이 되는데, 이것은 x^4에 대한 이차방정식으로 양의 근을 많아야 두 개 가지므로, x의 실숫값은 많아야 네 개이다.

이 점들에 시계 반대 방향으로 이름을 붙이기 위해 극각(polar angle)을 살펴보자. $0 < \beta < \alpha$이므로 점 A의 각 θ는 $0 < \theta < 45°$를 만족한다. 그러면 (β, α)의 각은 $90° - \theta$, $(-\alpha, -\beta)$의 각은 $180° + \theta$, $(-\beta, -\alpha)$의 각은 $270° - \theta$이다. 이 각들은 이 순서대로 커지므로

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$



(그림은 $u = 81, v = 4$인 경우이다. 청록색은 사차곡선, 자주색은 쌍곡선이다.)

$ABCD$는 직사각형이다

대각선(diagonal)은 AC와 BD이다. AC의 중점은 $(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}) = (0, 0)$이고, 마찬가지로 BD의 중점도 $(0, 0)$이다. 따라서 두 대각선은 서로를 이등분하고, $ABCD$는 평행사변

형(parallelogram)이다. 대각선의 길이는

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

로 서로 같다. 두 대각선의 길이가 같은 평행사변형은 직사각형이므로, $ABCD$는 직사각형이다.

생각해 보기 두 대각선의 길이가 같은 평행사변형은 왜 반드시 직사각형일까?

네 꼭짓점은 모두 O로부터 같은 거리 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$에 있으므로 O를 중심으로 하는 한 원 위에 놓이고, AC와 BD는 그 원의 지름이다. 반원에 대한 원주각은 직각이므로, $ABCD$의 각 내각은 직각이다. 대신 직접 확인하려면, $\overrightarrow{AB} = (\beta - \alpha,\ \alpha - \beta)$와 $\overrightarrow{BC} = (-\alpha - \beta,\ -\alpha - \beta)$의 스칼라곱(scalar product)을 계산하면 된다.

$$-(\beta - \alpha)(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)[(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)] = 0.$$

넓이

$\alpha > \beta > 0$을 이용하여 양의 제곱근을 택하면, 변의 길이는

$$AB = \sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha - \beta), \qquad BC = \sqrt{2(\alpha + \beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha + \beta),$$

이다. 따라서

$$\text{넓이} = AB \cdot BC = 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 2(\alpha^2 - \beta^2).$$

이제 A가 두 곡선 위에 모두 있다는 사실, 즉 $\alpha^4 + \beta^4 = u$이고 $\alpha\beta = v$라는 사실을 이용한다. 그러면

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = u - 2v^2.$$

$\alpha^2 - \beta^2 > 0$이므로 양의 근을 택하면

$$\boxed{\text{넓이} ABCD = 2\sqrt{u - 2v^2}}$$

이 결과는 서로 다른 네 점이 있다는 문제의 가정이 $u > 2v^2$를 강제한다는 것도 보여 준다. $u = 2v^2$이면 $\alpha = \beta$이고 두 곡선은 접하기만 한다.

$u = 81, v = 4$이면 $u - 2v^2 = 81 - 32 = 49$이므로, 요구한 대로 넓이는 $2 \times 7 = 14$이다.

검산

$u = 81, v = 4$일 때 $x^8 - 81x^4 + 256 = 0$을 수치적으로 풀면 $\alpha \approx 2.9690$, $\beta = 4/\alpha \approx 1.3472$를 얻는다. 그러면 $2(\alpha^2 - \beta^2) \approx 14.000$이고, 네 꼭짓점에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용해도 같은 넓이가 나온다. u가 $2v^2$ 쪽으로 줄어들면 각 사분면(quadrant)의 두 점이 $y = x$ 위에서 합쳐지고 직사각형은 납작해져 선분이 되는데, 이는 넓이 $2\sqrt{u - 2v^2} \to 0$과 들어맞는다.

흔한 실수

- 좌표축을 $xy = v$의 대칭축으로 드는 실수. 좌표축에 대하여 반사하면 제1사분면의 가지가 제2사분면으로 옮겨지는데, 그곳에서는 $xy < 0$이다.
- 점의 이름을 잘못된 순서로 붙이는 실수. 예를 들어 $B = (-\alpha, -\beta)$로 잡으면 $ABCD$를 따라가는 경로가 꼬인 사각형이 된다.
- α와 β를 직접 구하려는 실수. 넓이에는 $\alpha^2 - \beta^2$만 필요하며, 이것은 u와 v에서 곧바로 나온다.

STEP 너머

$x^4 + y^4 = u$를 보존하는 반사와 회전들은 정사각형의 대칭군, 즉 위수 8인 이면체군(dihedral group)을 이룬다. 쌍곡선은 그중 위수 4인 부분군(subgroup)(두 반사, 반바퀴 회전, 항등변환)만 보존한다. 교점들은 두 곡선이 공유하는 대칭에 의해 서로 치환되며, 이처럼 군의 작용을 통해 대상을 찾아내는 것은 대학 1학년 군론(group theory)의 주제 가운데 하나이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 아이디어를 접하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.