풀이

STEP I 2009, 문제 9

역학 • 충돌하는 포물체

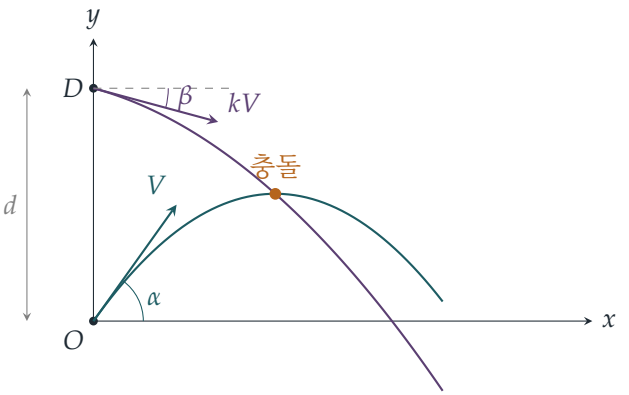
> **STEP I 2009, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q9

핵심 아이디어

중력만 받는 두 입자는 **같은** 가속도를 가지므로, 두 입자의 위치를 비교하면 $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거된다. 즉 서로에 대해 상대적으로 보면 두 입자는 일정한 속도로 직선 운동을 한다. 충돌한다는 것은 같은 시각 T에 수평 변위와 수직 변위가 각각 같다는 뜻이다. 수평 방향의 식에서 코사인 관계식이 곧바로 나온다. 수직 방향의 식에는 β가 들어 있는데, $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$와 코사인 관계식을 이용하여 이를 소거한다.

풀이

P와 Q를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 모형화한다. 두 입자가 충돌하려면 같은 연직 평면 안에서 같은 수평 방향으로 던져져야 한다. O를 원점으로 잡고, 그 방향을 x축의 수평 방향, 연직 위쪽을 y축 방향으로 잡으면 D는 $(0, d)$이다.



시각 t에서 두 입자의 위치는

$$\begin{aligned} P: &\quad x = Vt\cos\alpha, && y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ Q: &\quad x = kVt\cos\beta, && y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 Q의 수직 속도에 음의 부호가 붙는 것은 β를 수평선 **아래쪽으로** 잰 각이기 때문이다.

코사인 관계식과 T에 대한 방정식

충돌하는 순간 $t = T > 0$이고 두 입자의 좌표가 일치한다. 수평 방향으로는

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

이고, 양변을 $VT \neq 0$으로 나누면 요구한 대로 $\cos\alpha = k\cos\beta$를 얻는다.

수직 방향으로는 양변에서 $-\frac{1}{2}gT^2$ 항이 소거되어

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{따라서} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

가 남는다.

> **생각해 보기** β를 어떻게 없앨 수 있을까?

$k\cos\beta$는 α로 나타낼 수 있으므로, 양변을 제곱하여 $k^2\sin^2\beta$가 나오게 한다. 이 값은

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

이다. 수직 방향의 식을 제곱하고 이를 대입하면

$$\begin{aligned} (k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 &= d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha, \\ (k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \\ (k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 방정식이다.

이를 T에 대한 이차방정식(quadratic equation)으로 보면, $k > 1$이므로 두 근의 곱은 $-d^2/((k^2-1)V^2) < 0$이다. 따라서 양수인 근은 정확히 하나이고, 그 근이 충돌 시각이다.

P의 최고점에서의 충돌

P의 수직 속도는 $V\sin\alpha - gt$이고, 이 값은 $t = V\sin\alpha/g$일 때 0이다. 따라서 이 경우 $T = V\sin\alpha/g$이다. 이를 이차방정식에 대입하면

$$(k^2 - 1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g} - d^2 = 0.$$

이다. 양변에 g^2을 곱하고 $\sin^2\alpha$가 들어 있는 항끼리 묶으면 $\sin^2\alpha\,((k^2-1)V^4+2gdV^2)=g^2d^2$이므로

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{g^2d^2}{V^2((k^2-1)V^2+2gd)}}$$

이다. $k>1$이므로 괄호 안의 값은 양수이고, 따라서 이 식은 잘 정의된다.

부등식

$\sin^2\alpha\le 1$이고 분모가 양수이므로

$$\begin{aligned} g^2d^2 &\le (k^2-1)V^4+2gdV^2,\\ g^2d^2-2gdV^2+V^4 &\le k^2V^4,\\ (gd-V^2)^2 &\le (kV^2)^2. \end{aligned}$$

이다. $|gd-V^2|$와 kV^2는 모두 음이 아니므로, 제곱근을 취해도 부등호의 방향은 유지된다. 즉 $|gd-V^2|\le kV^2$이다. 특히 $gd-V^2\le kV^2$, 곧

$$gd\le(1+k)V^2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 등호가 성립하려면 $\sin^2\alpha=1$, 즉 P를 연직 위로 던져야 한다.

검산

- $g=10$, $V=10$, $k=2$, $d=10$이라 하자. 공식에서 $\sin^2\alpha=\frac{100\cdot100}{100(300+200)}=\frac{1}{5}$이므로 $T=V\sin\alpha/g=1/\sqrt{5}$이다. 이때 이차방정식의 좌변은 $3\cdot100\cdot\frac{1}{5}+2\cdot10\cdot10\cdot\frac{1}{5}-100=60+40-100=0$이다. $\cos\beta=\cos\alpha/2$로 잡으면 시각 T에서 두 입자 모두 높이 1에 있다. 이 경우 $gd=100\le300=(1+k)V^2$이다.
- 수천 개의 무작위 V, k, α, T에 대하여 두 운동을 수치적으로 한 단계씩 진행시켜 본 결과, 충돌, 코사인 관계식, 이차방정식, $\sin^2\alpha$에 대한 공식이 반올림 오차 범위 안에서 모두 성립함을 확인하였다.
- 극한의 경우: $\alpha\to\frac{1}{2}\pi$이면 $\cos\beta\to0$이기도 하므로 두 입자 모두 연직으로 움직인다. P는 시간 V/g 동안 높이 $V^2/(2g)$까지 올라가고, 그동안 Q는 $kV^2/g+V^2/(2g)$만큼 떨어지므로 $d=(1+k)V^2/g$이다. 예상대로 등호가 성립한다.

흔한 실수

- Q의 수직 속도의 부호를 잘못 잡는 것: 수평선 **아래쪽으로** 던졌으므로 $-kV\sin\beta$이다.

- $\frac{1}{2}gT^2$ 항을 그대로 남겨 두는 것: 이 항들은 소거되며, T에 대한 방정식에는 g가 들어 있지 않다.
- $(gd - V^2)^2 \leq k^2V^4$의 제곱근을 취할 때 절댓값을 언급하지 않고 $gd - V^2 \leq kV^2$로 쓰는 것. 결론은 맞지만, 그 이유는 $x \leq |x|$이기 때문이다.

STEP 너머

중력이 소거되는 현상은 기준틀(frame of reference)을 바꾸는 생각을 처음 맛보게 해 준다. 가속도 g로 자유낙하하는 기준틀에서는 두 입자 모두 일정한 속력으로 직선 운동을 하므로, 충돌 문제는 상대 속도(relative velocity)의 기하 문제로 바뀐다. 이것이 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)의 바탕에 있는 생각이며, 이를 이용하면 포물체 요격 문제의 상당수가 한 줄로 풀린다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 비관성 기준틀(non-inertial frame)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.