풀이

STEP I 2009, 문제 8

순수수학 • 원과 접선

> **STEP I 2009, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q8

핵심 아이디어

원이 직선에 접하는(touch) 것은 원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름과 같을 때, 그리고 그때에만 그렇다. 원 C들의 중심은 모두 원점을 지나면서 x축과 $3y = 4x$ 사이의 각을 이등분하는 직선 위에 있으므로, 각각의 원은 두 직선에 모두 접한다. 따라서 C는 그 모서리에 놓인 원 전체의 모임이 되고, 소문항 (ii)의 내접원(incircle)은 반드시 이들 가운데 하나여야 한다. 세 번째 변에도 접하도록 하는 t의 값만 고르면 된다.

풀이

소문항 (i)

원 C의 중심은 $P = (2t, t)$이고 반지름은 t이다. $t > 0$이므로 중심은 x축 위쪽에 있고 x축까지의 거리는 t로, 반지름과 같다. 따라서 C는 점 $(2t, 0)$에서 $y = 0$에 접한다.

직선 OP의 기울기(gradient)는 $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$이므로 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$이고

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

이제 β를 x축과 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선 $3y = 4x$ 사이의 예각이라 하자. 그러면 $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$이다. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이므로($\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$이기 때문이다) 각 2α도 예각이고, tan는 예각에서 일대일(one-to-one)이므로 $\beta = 2\alpha$이다.

> ? **생각해 보기** $\beta = 2\alpha$라는 사실로부터 왜 C가 $3y = 4x$에 접한다는 것을 알 수 있는가?

직선 OP는 x축과 각 α를 이루고 직선 $3y = 4x$와 각 $\beta - \alpha = \alpha$를 이루므로, OP는 두 직선 사이의 각을 이등분한다. P에서 각 직선에 수선(perpendicular)을 내리면 빗변(hypotenuse) OP가 같고 O에서의 각 α도 같은 두 직각삼각형이 생기므로, 두 수선의 길이는 모두 $OP\sin\alpha$로 같다. x축까지의 거리가 t이므로 P에서 $3y = 4x$까지의 거리도 반지름인 t이다. 따라서 C는 $3y = 4x$에 접한다.

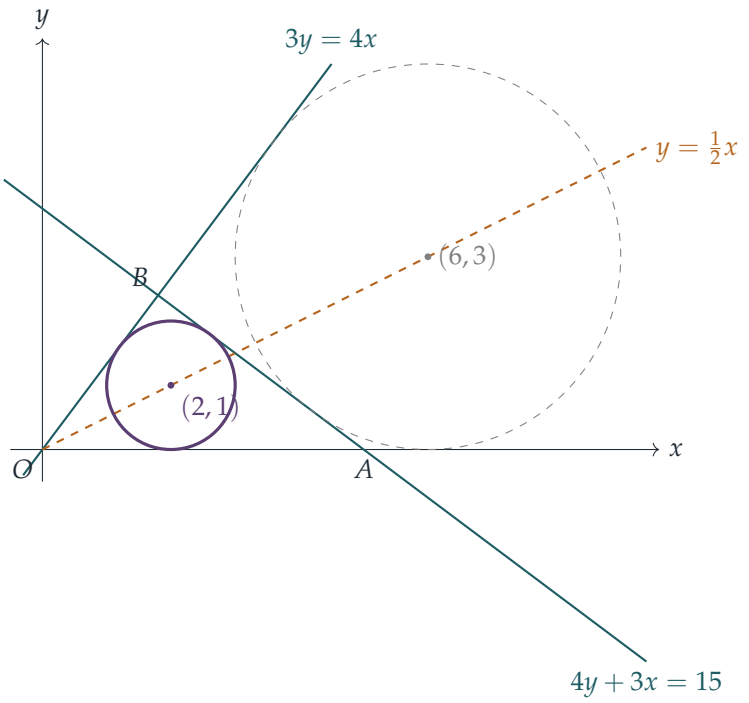
(검산으로, 점과 직선 사이의 거리 공식을 쓰면 $(2t, t)$에서 $4x - 3y = 0$까지의 거리는 $\frac{|8t-3t|}{5} = t$이다.)

소문항 (ii)

먼저 삼각형을 구한다. 직선 $y = 0$과 $3y = 4x$는 $O = (0,0)$에서 만나고, $y = 0$과 $4y + 3x = 15$는 $A = (5,0)$에서 만난다. 세 번째 꼭짓점을 구하기 위해 $y = \frac{4}{3}x$를 $4y + 3x = 15$에 대입하면

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

이므로 $B = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$이다. $3y = 4x$와 $4y + 3x = 15$의 기울기는 각각 $\frac{4}{3}$과 $-\frac{3}{4}$이고 그 곱이 -1이므로, 삼각형은 B에서 직각이다. 세 변의 길이는 $OA = 5$, $OB = 3$, $AB = 4$이다.



내접원은 삼각형 안에 있으므로, O 근처에서 양의 x축과 직선 $3y = 4x$ 사이의 예각 안에 놓여 두 직선에 모두 접한다. 그 중심은 두 직선에서 같은 거리에 있으므로 그 각의 이등분선(angle bisector) 위에 있고, 소문항 (i)에 의해 이 이등분선은 직선 $y = \frac{1}{2}x$(직선 OP)이

다. 중심을 $t > 0$인 $(2t, t)$라 하면 $y = 0$까지의 거리는 t이고, 이것이 반지름이어야 한다. 따라서 내접원은 소문항 (i)의 원 C 가운데 하나이다.

이제 C가 세 번째 변 $3x + 4y - 15 = 0$에도 접하도록 하면 된다. $(2t, t)$에서 이 직선까지의 거리가 t와 같아야 하므로

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

$10t - 15 = 5t$이면 $t = 3$이고, $15 - 10t = 5t$이면 $t = 1$이다.

두 원 모두 세 직선에 접하지만, 삼각형 안에 있는 것은 하나뿐이다. $t = 3$일 때 중심 $(6, 3)$은 $3x + 4y = 30 > 15$이므로, AB에 대해 $O(3x + 4y = 0 < 15)$의 반대쪽에 있다. 이것은 **방접원**(*excircle*)으로, 그림의 점선 원이다. $t = 1$일 때 중심 $(2, 1)$은 $3x + 4y = 10 < 15$이고, $y = 0$의 위쪽, $3y = 4x$의 아래쪽에 있으므로 삼각형 안에 있다. 중심이 삼각형 안에 있으면서 세 변에 모두 접하는 원은 삼각형 안에 놓이므로, 내접원의 중심은 $(2, 1)$이고 반지름은 1이다.

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

검산

직각을 낀 두 변이 a, b이고 빗변이 c인 직각삼각형에서 내접원의 반지름(inradius)은 $\frac{1}{2}(a + b - c)$이다. 여기서는 $\frac{1}{2}(3 + 4 - 5) = 1$로, 구한 값과 같다. 내접원의 반지름은 넓이/반둘레(semi-perimeter)$= 6/6 = 1$로도 구할 수 있다. 수치로 확인하면, 내심(incentre)을 꼭짓점들의 변의 길이에 따른 가중평균 $\frac{4O+3A+5B}{12}$로 계산하면 정확히 $(2, 1)$이 나오고, $(2, 1)$에서 세 직선까지의 거리는 모두 1이다.

흔한 실수

- $|10t - 15| = 5t$를 절댓값(modulus) 없이 풀어 $t = 3$만 구하는 실수. 이것은 내접원이 아니라 방접원이다.
- 두 근을 모두 구하고도 왜 $t = 1$이 삼각형 안에 있는 원인지 설명하지 않는 실수.
- 소문항 (i)에서 두 각이 모두 예각임을 언급하지 않고 $\tan\beta = \tan 2\alpha$이므로 $\beta = 2\alpha$라고 말하는 실수.

STEP 너머

모든 삼각형에는 내접원 하나와 방접원 세 개가 있고, 이 네 원의 중심은 내각과 외각의 이등분선들이 만나는 점이다. 여기서 구한 값 $t = 3$은 O의 맞은편에 있는 방접원이다. 이 원들은

구점원(nine-point circle)과, 구점원이 이 네 원에 모두 접한다는 포이어바흐(Feuerbach) 정리를 비롯한 고전 기하학의 풍부한 세계로 이어진다. 콕서터(Coxeter)의 *Introduction to Geometry*(기하학 입문)는 이를 탐구하기에 좋은 고전이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.