풀이

STEP I 2009, 문제 7

순수수학 • 부분적분

> **STEP I 2009, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q7

핵심 아이디어

첫 번째 적분은 "부분적분(integration by parts)을 두 번 하면 원래 적분이 다시 나타난다"는 고전적인 기법을 쓴다. 두 단계를 거치면 우변에 원래 적분이 다시 나타나고, 이것을 방정식의 미지수처럼 풀어 구한다. 모든 정수 m에 대하여 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$의 공식을 얻고 나면, 뒤의 소문항들은 계산 정리에 불과하다. 사인과 코사인의 곱을 하나의 코사인들의 합으로 바꾸면, 각 항은 곧바로 적분할 수 있다.

풀이

일반적인 적분

$I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$라 쓰고, 간단히 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$이라 하자. $u = \cos mx$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하면

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

m이 정수이므로 $\cos 2m\pi = 1$이고, 따라서 대괄호 부분은 $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$이다. 이번에는 $u = \sin mx$로 두고 다시 부분적분하면

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

이다. 여기서도 m이 정수라는 사실을 써서 $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$이기 때문이다. 두 식을 합치면

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{따라서} \qquad (m^2+1)I_m = E.$$

생각해 보기 한 바퀴 돌아서 I_m이 다시 나왔다. 이것은 막다른 길일까?

아니다. 바로 이것이 우리가 원하던 것이다. 방정식 $I_m = E - m^2 I_m$은 미지의 수 I_m에 대한 일차방정식이고, $m^2 + 1 \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. ($m = 0$인 경우도 포함된다. 이때는 단지 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$라는 뜻이다.) 경계항을 간단하게 만드는 데 정수 조건이 쓰였다는 점에 주목하자. m이 정수가 아니면 이 공식은 성립하지 않는다.

소문항 (i)

삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 전개하면 $\sin A \sin B$ 항들이 소거된다.

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

$A = 6x$, $B = x$로 두면 $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$를 얻는다. 따라서 $m = 7$과 $m = 5$에 대하여 일반적인 결과를 쓰면

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}(I_7 + I_5) = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300} E = \frac{76}{2600} E = \frac{19}{650}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려는 결과이다.

소문항 (ii)

곱을 합으로 바꾸는(product-to-sum) 단계가 두 번 필요하다. 덧셈정리를 더하는 대신 빼면 $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$를 얻으므로, $A = 4x$, $B = 2x$로 두면

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

여기에 $\cos x$를 곱하고 각 곱에 소문항 (i)의 항등식을 쓰면

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

이제 각 항은 $m = 3, 1, 7, 5$인 경우의 일반적인 결과로 처리된다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}(I_3 + I_1 - I_7 - I_5) \\ &= \tfrac{1}{4}\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650} E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650} E.\end{aligned}$$

따라서

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1).$$

검산

- $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m \sin mx)}{m^2+1}$을 미분하면 $\mathrm{e}^x \cos mx$가 되므로 이것은 부정적분(antiderivative)이다. 이를 2π와 0에서 계산하면 일반적인 결과가 다시 나온다.
- 소문항 (ii)의 항등식에 $x = 0$을 대입하면 좌변은 0이고 우변은 $\frac{1}{4}(1+1-1-1) = 0$이다. 맞다.
- 수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)) 계산하면 소문항 (i)의 적분은 15.6236…, 소문항 (ii)의 적분은 72.3619…이고, $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1 \approx 534.49$일 때 $\frac{19}{650}E$, $\frac{44}{325}E$와 일치한다.

흔한 실수

- 두 번째 부분적분에서의 부호 실수: $\sin mx$의 도함수는 $+m\cos mx$이고, 부분적분 공식의 음의 부호와 합쳐져 $-m^2 I_m$이 된다.
- 곱을 합으로 바꾸는 각 단계에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨려, 소문항 (ii)에서 $\frac{1}{4}$ 대신 $\frac{1}{2}$이 붙는 실수.

STEP 너머

더 매끄러운 방법은 $\cos mx = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$로 쓰는 것이다. 그러면 부분적분을 전혀 하지 않고도 $I_m = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \dfrac{E}{1+\mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1+m^2}$를 얻는다. 뒤의 소문항들에서 한 것처럼 함수를 성분 $\cos mx$들로 분해하는 것은 푸리에 급수(Fourier series)의 출발점이며, 푸리에 급수는 대학 1학년 해석학과 미분방정식의 핵심 도구이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 읽기 쉬운 입문이 있고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 지수함수의 관점이 왜 그토록 잘 통하는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.