풀이

STEP I 2009, 문제 6

순수수학 • 치환적분

STEP I 2009, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q6

핵심 아이디어

적분 구간의 끝점 $1/m$과 m은 $x \mapsto 1/x$에 의해 서로 바뀌므로, 이 치환(substitution)을 먼저 시도해 보는 것이 자연스럽다. 이 치환은 구간을 자기 자신으로 보내고, 거듭제곱 x^{-n}을 거듭제곱 u^{n-1}로 바꾸어 준다. 그러면 (ii)를 이용하여 (iii)의 다루기 어려운 조각들을 (i)의 다루기 쉬운 적분의 복사본으로 바꿀 수 있다. (iii)(b)에서는 구간이 더 이상 대칭이 아니지만, 같은 치환이 $[1,2]$를 $[\frac{1}{2},1]$로 보내므로 두 반쪽이 다시 이어 붙는다.

풀이

소문항 (i)

x^2을 $x+1$로 나누면

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

이고, 구간에서 $x+1 > 0$이므로($m > 0$이기 때문이다)

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

로그 부분은

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

이 된다. 다항식 부분은

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(m^2-\frac{1}{m^2}\Big)-\Big(m-\frac{1}{m}\Big) &= \Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)-1\Big]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2}=\frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

이 된다. 두 부분을 더하면 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$x=1/u$로 놓으면 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$이다. $x=1/m$일 때 $u=m$이고, $x=m$일 때 $u=1/m$이다. 또한

$$x^n(x+1)=\frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

이며, 여기서 음의 부호를 이용하여 적분 구간의 위끝과 아래끝을 다시 바꾸었다. 이것이 원하는 결과이다.

소문항 (iii)

(a) 피적분함수(integrand)를 나누면

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

이다. 구간은 $[\frac{1}{2},2]$이고, 이는 (ii)의 구간에서 $m=2$인 경우이다. (ii)를 $n=3$으로 적용하면

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

이고, 이는 첫 번째 조각의 세 배이다. (i)을 $m=2$로 적용하면

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2=\frac{3}{8}+\ln 2.$$

이다. 따라서 적분값은 $4(\frac{3}{8}+\ln 2)$, 즉

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

이다.

(b) 이번에는

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3(x+1)}.$$

이다.

> **생각해 보기** 이번 구간은 $[1,2]$이며, $[1/m, m]$ 꼴이 아니다. 그래도 (ii)가 도움이 될까?

그렇다. 치환 $x = 1/u$는 양수로 이루어진 어떤 구간에서도 쓸 수 있고, 단지 적분 구간의 끝점을 옮길 뿐이다. $x = 1$이면 $u = 1$, $x = 2$이면 $u = \frac{1}{2}$라는 점만 바꾸어 (ii)와 똑같이 계산하면

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

임을 알 수 있다. 이것은 첫 번째 조각과 피적분함수가 같고 구간만 이웃한 구간이므로, 둘을 합치면 $m = 2$일 때 (i)의 적분이 된다.

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

남은 조각은

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

이다. 모두 더하면

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

이다.

검산

- (i)에서 $m = 1$이면 한 점에서의 적분이 되는데, 실제로 우변은 $0 + \ln 1 = 0$이다. m을 $1/m$으로 바꾸면 적분 구간의 끝점이 서로 바뀌므로 적분값의 부호가 바뀌어야 하는데, 공식도 실제로 부호가 바뀐다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 (iii)(a)는 4.272589로 $\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$와 일치하고, (iii)(b)는 1.473612로 $\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$와 일치한다.
- (b)의 타당성 검사: $[1,2]$에서 피적분함수는 1.5에서 약 1.37까지 내려갔다가 약 1.71까지 올라가므로, 답이 1.47 근처인 것은 타당하다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$에서 나오는 음의 부호를 빠뜨리거나, 적분 구간의 끝점을 바꾸는 것을 잊는 실수. 두 가지를 모두 해야 하며, 둘은 서로 상쇄된다.
- (iii)(b)에서 구간이 $[\frac{1}{2}, 2]$인 것처럼 (ii)를 적용하는 실수. 치환은 $[1,2]$를 $[\frac{1}{2}, 1]$로 옮기며, 바로 이 점 덕분에 조각들이 서로 맞아떨어진다.

STEP 너머

사상 $x \mapsto 1/x$는 구간 $[1/m, m]$의 대칭(symmetry)이며, 정의역의 대칭을 이용하여 적분들 사이의 관계를 얻는 것은 해석학(analysis)에서 거듭 등장하는 기법이다. 예를 들어 $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$임을 보일 때도 이 방법을 쓴다. 복소해석학(complex analysis)에서는 같은 반전(inversion) $z \mapsto 1/z$가 단위원의 안쪽과 바깥쪽을 서로 바꾸며, 기본적인 도구가 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 반전을 기하학적으로 다룬 아름다운 설명이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.