풀이

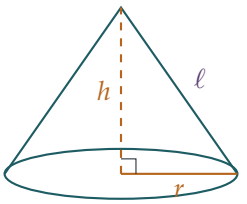
# STEP I 2009, 문제 5

순수수학 • 제약 조건이 있는 최적화

> **STEP I 2009, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q5

## 핵심 아이디어

길이는 세 개이지만 자유롭게 정할 수 있는 것은 두 개뿐이다. $r$, $h$, $\ell$은 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem) $\ell^2 = r^2 + h^2$으로 묶여 있기 때문이다. 한 양을 고정하면 자유도가 하나 더 줄어들므로, 각 소문항에서 정상값을 구할 양을 $r$만의 함수로 나타내고 미분한다. 제곱근이 있으면 계산이 복잡해지므로 $V^2$이나 $A^2$을 대신 다루는 것이 유리하다. 이들은 정확히 $V$나 $A$가 정상인 곳에서 정상이 된다.




## 풀이

이 풀이 전체에서 $r$, $h$, $\ell$은 양수이고, 단면의 직각삼각형으로부터

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

이다. $V > 0$, $A > 0$이므로 $V^2$의 도함수(derivative)는 $2V\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$이고, 이것은 정확히 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$가 0일 때 0이 된다. $A$도 마찬가지이다. 따라서 제곱한 양의 정상점(stationary point)을 대신 구해도 된다.

**소문항 (i)**

$A$가 고정되어 있으면 $\ell = \dfrac{A}{\pi r}$이므로

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

이다. (실제로 원뿔이 되려면 $h > 0$, 즉 $A > \pi r^2$이어야 한다.) 그러면

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

이다. $A$를 상수로 두고 $r$에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

이다. $r > 0$이므로 이것은 정확히

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

일 때 0이 되며, 이것이 첫 번째 결과이다. 양의 제곱근을 취하면 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$이므로

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$이므로 이것은 실제로 원뿔임에 주의한다.)

$r$가 이 값을 지나며 증가할 때 $V^2$의 도함수는 양에서 음으로 바뀌므로, 이 정상값은 최댓값이다. 즉 주어진 옆넓이(curved surface area)에 대하여 부피가 가장 큰 원뿔이다. 또 $\ell^2 = r^2 + h^2$에서 $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$이므로 $h = \sqrt{2}\, r$이다.

**소문항 (ii)**

이번에는 $V$가 고정되어 있으므로 $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$이고

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

이다. $V$를 상수로 두고 $r$에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

이고, 이것은 정확히

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{따라서} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\pi r^3$$

일 때 0이 된다($V > 0$이므로 양의 제곱근을 취한다).

**생각해 보기** $V$를 $r$로 나타냈지만, 문제에서 묻는 것은 $h$이다. 어떻게 $h$에 도달할 수 있을까?

부피 공식 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$를 한 번 더 이용한다. 이것을 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$과 같다고 놓고 $\frac{1}{3}\pi r^2$을 약분하면

$$h = \sqrt{2}\, r.$$

을 얻는다. 이번에는 도함수가 음에서 양으로 바뀐다($r$가 작을 때는 $9V^2/r^2$ 항이 매우 크고, $r$가 클 때는 $\pi^2 r^4$ 항이 매우 크다). 따라서 이것은 주어진 부피에 대하여 옆넓이가 가장 작은 원뿔이다.

**생각해 보기** 두 소문항 모두 같은 모양 $h = \sqrt{2}\, r$을 주는 것은 우연일까?

그렇지 않다. 어떤 원뿔이 자신의 넓이에 대하여 부피를 최대로 한다면, 그 원뿔은 자신의 부피에 대하여 넓이도 최소로 한다. 부피는 같고 넓이가 더 작은 원뿔이 있다면, 그 원뿔을 원래 넓이가 될 때까지 확대할 수 있고, 그러면 부피가 더 커지는데, 이는 불가능하기 때문이다. 문제는 모양을 닮음(scale)의 차이를 제외하고만 결정하므로, 두 소문항은 같은 비 $h : r$을 골라내야 한다.

## 검산

- 소문항 (i)에서 $r = 1$로 두면 $A = \sqrt{3}\,\pi$, $\ell = \sqrt{3}$, $h = \sqrt{2}$이고, $\pi r \ell = \sqrt{3}\,\pi$로 맞아떨어진다. $A$를 $\sqrt{3}\,\pi$로 유지한 채 $r$를 0.99나 1.01로 살짝 바꾸면 부피가 약간 작아진다.
- 임의로 고정한 $A$에 대하여 $V$를 수치적으로 최대화하고, 임의로 고정한 $V$에 대하여 $A$를 수치적으로 최소화해 보면, 언제나 $h/r \approx 1.41421$, 즉 $\sqrt{2}$를 얻었다.
- 차원: $A^2$과 $\pi^2 r^4$은 모두 (길이)$^4$이고, $V^2$과 $\pi^2 r^6$은 모두 (길이)$^6$이다.

## 흔한 실수

- $\ell$이 $r$와 $h$에 의존한다는 것을 잊는 실수. 실제로는 $A$(또는 $V$)만 고정되어 있는데, 소문항 (i)에서 $\ell$을 상수로, 또는 소문항 (ii)에서 $h$를 상수로 취급하는 경우이다.
- 제곱근이 남아 있는 상태로 $V$를 직접 미분하는 것. 이렇게 해도 되지만 실수하기 쉽다. 먼저 제곱하면 연쇄법칙(chain rule)을 아예 쓰지 않아도 된다.

## STEP 너머

다른 양을 고정한 채 한 양의 극값을 구하는 문제를 **제약 조건이 있는 최적화**(*constrained optimisation*) 문제라고 한다. 대학에서는 라그랑주 승수법(method of Lagrange multipliers)을 배우는데, 이 방법은 변수를 소거하지 않고도 제약 조건을 다룰 수 있으며, 여기서 두 소문항 사이의 "쌍대성(duality)"을 설명해 준다. 다변수 미적분학과 라그랑주 승수법을 처음 명쾌하게 접하려면 Stewart의 *Calculus*(미적분학)를 읽어 보라. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 최적화 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.