풀이

STEP I 2009, 문제 4

순수수학 • 코사인법칙

> **STEP I 2009, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q4

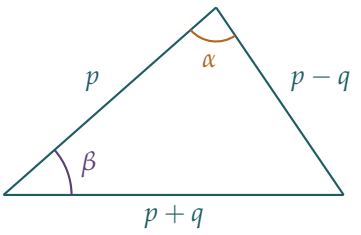
핵심 아이디어

삼각형에서 가장 큰 각은 가장 긴 변의 대각이고, 가장 작은 각은 가장 짧은 변의 대각이다. 따라서 코사인법칙(cosine rule)을 쓰면 $\cos\alpha$와 $\cos\beta$를 p와 q로 바로 나타낼 수 있고, 항등식(identity)은 단순한 대수 계산으로 확인된다. 둘째 부분에서는 $\alpha = 2\beta$이므로 배각 공식(double-angle formula)을 써서 $\cos\alpha$를 $\cos\beta$로 나타낼 수 있다. 그러면 항등식은 $\cos\beta$만의 방정식이 된다.

풀이

항등식

$p - q < p < p + q$이므로 가장 큰 각 α는 변 $p + q$의 대각이고, 가장 작은 각 β는 변 $p - q$의 대각이다.



α에 대해 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p - 4q}{2(p-q)},$$

이고, β에 대해 적용하면

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

이다. 여기서 p로 약분했는데, $p>0$이므로 이는 허용된다. 그러면

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

이므로

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

이다. 한편 다른 쪽은

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

이다. 두 식이 일치하므로, 요구한 대로 $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$이다.

(삼각형이 존재하려면 $(p-q)+p>p+q$, 즉 $p>2q$여야 한다. 이때 항등식의 양변은 모두 양수이지만, 위의 대수 계산은 이 조건에 의존하지 않는다.)

$\alpha = 2\beta$인 경우

$c=\cos\beta$라 하자. 그러면 $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$이므로 $1-\cos\alpha = 2(1-c^2) = 2(1-c)(1+c)$이다. 이를 항등식에 대입하면

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** 양변을 $1+c$로 나눌 수 있는가?

나눌 수 있다. β는 삼각형의 한 각이므로 $0<\beta<\pi$이고 $c=\cos\beta>-1$이다. 즉 $1+c\neq 0$이다. 양변을 이것으로 나누면

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

이다. 따라서 $c=\frac{3}{4}$ 또는 $c=\frac{3}{2}$이다. 코사인 값은 1보다 클 수 없으므로 $\frac{3}{2}$는 버린다. 그러므로 요구한 대로 $\cos\beta=\frac{3}{4}$이다.

변의 비

첫째 부분에서 구한 $\cos\beta$의 식을 쓰면

$$\frac{p+4q}{2(p+q)} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad 4p+16q = 6p+6q \quad \Longrightarrow \quad p = 5q.$$

이다. 이는 $p > 2q$를 만족하므로 삼각형이 존재한다. 세 변은 $p-q = 4q$, $p = 5q$, $p+q = 6q$이므로 변의 비는

$$4 : 5 : 6.$$

이다.

검산

세 변이 $4, 5, 6$인 삼각형에서 코사인법칙을 쓰면 $\cos\beta = \frac{25+36-16}{60} = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}$이다. 또한 $2\cdot(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$이므로 $\alpha = 2\beta$임이 확인된다(두 각 모두 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $(0,\pi)$에 있다). 수치로는 $\beta \approx 0.7227$, $\alpha \approx 1.4455$ 라디안이다. 이 삼각형에서 항등식은 $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}$가 된다. 또한 $p > 2q$인 무작위 삼각형 10^5개에 대해 항등식을 시험해 보았는데, 양변은 3×10^{-15} 이내에서 일치했다.

흔한 실수

- 각을 엉뚱한 변에 대응시키는 것. 가장 큰 각은 **가장 긴** 변 $p+q$의 대각이다.
- 인수 $1+c$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 약분하거나, 근 $c = \frac{3}{2}$를 그대로 남겨 두는 것.
- 답을 세 변의 비 $4:5:6$이 아니라 $p = 5q$로 제시하는 것.

STEP 너머

닮음을 무시하면, 세 변이 등차수열(arithmetic progression)을 이루고 가장 큰 각이 가장 작은 각의 두 배인 삼각형은 세 변이 $4, 5, 6$인 삼각형뿐이다. "세 변이 정수이고 각들이 주어진 비를 이루는 삼각형은 무엇인가?"와 같은 질문은 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)의 경우와 마찬가지로 곧바로 디오판토스 방정식(Diophantine equations)과 곡선 위의 유리점(rational points)을 매개화하는 문제로 이어진다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이러한 아이디어가 전개되는 과정을 살펴보기 좋은 책이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 형식의 기하와 삼각함수 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.