풀이

STEP I 2009, 문제 3

순수수학 • 실근의 개수 세기

> **STEP I 2009, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

핵심 아이디어

양변을 알맞게 거듭제곱하여 근호를 없애되, 그 과정에서 잃는 정보를 놓치지 않아야 한다. 제곱근(square root)은 결코 음수가 아니므로, 제곱하는 과정을 되돌릴 수 있으려면 $x \geq 0$이라는 조건을 함께 요구해야 한다. 반면 실수 세제곱근(cube root)에는 이런 제약이 없다. 모든 실수는 실수 세제곱근을 정확히 하나 가지기 때문이다. 그러고 나면 각 개수 세기는 결국 이차방정식(quadratic equation)의 근을 세는 문제로 귀결되고, 그 근들의 부호는 두 근의 합과 곱으로부터 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

소문항 (i): 제곱근 방정식

여기서 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$는 음이 아닌 제곱근을 뜻하므로, 모든 해는 $x \geq 0$을 만족하고, 양변을 제곱하면 $x^2 = a - x$, 즉 $x^2 + x - a = 0$을 얻는다. 거꾸로 $x \geq 0$이고 $x^2 + x - a = 0$이면 $a - x = x^2 \geq 0$이고 $(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$이다. 따라서

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ 그리고 } x \geq 0,$$

이고, 이차방정식 $x^2 + x - a = 0$의 **음이 아닌** 근의 개수를 세면 된다. 이 방정식의 두 근을 (실근일 때) α, β라 하면

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

경우 $a > 0$. 판별식(discriminant) $1 + 4a$가 양수이므로 서로 다른 두 실근이 있고, 두 근의 곱 $-a$는 음수이다. 따라서 한 근은 양수, 다른 한 근은 음수이다. 해는 정확히 하나이다.

경우 $a = 0$. 이차방정식은 $x(x+1) = 0$이고 근은 0과 -1이다. 이 가운데 음이 아닌 것은

$x = 0$뿐이다. 해는 정확히 하나이다.

경우 $a < 0$. $a < -\frac{1}{4}$이면 판별식이 음수이므로 실근이 전혀 없다. $-\frac{1}{4} \le a < 0$이면 근은 실수이고, 두 근의 곱 $-a$가 양수이므로 두 근의 부호가 같으며, 두 근의 합이 -1이므로 둘 다 음수이다. 어느 쪽이든 음이 아닌 근이 없으므로 해가 없다.

따라서 이 방정식은 $a \ge 0$일 때 실수해를 하나 가지고, $a < 0$일 때는 실수해를 가지지 않는다. 이로써 요구한 것이 증명되었다.

소문항 (i): 세제곱근 방정식

모든 실수 t는 실수 세제곱근을 정확히 하나 가지며, 부호 조건 없이 $x = t^{\frac{1}{3}} \iff x^3 = t$이다. 따라서 주어진 방정식은

$$x^3 - (1+a)x + a = 0.$$

과 동치이다. 계수의 합이 $1 - (1+a) + a = 0$이므로 $x = 1$은 언제나 근이고, 인수로 나누면

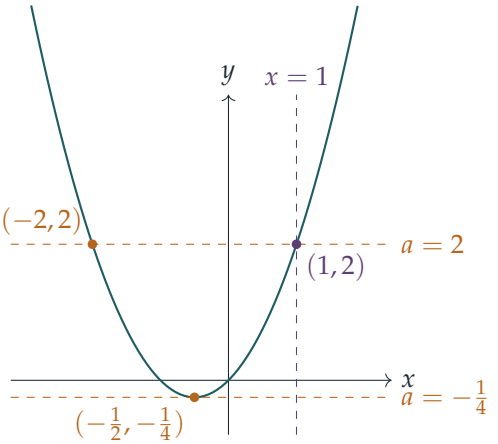
$$x^3 - (1+a)x + a = (x-1)(x^2 + x - a).$$

앞에서와 같은 이차식이 나타났다. 해는 $x = 1$과 $x^2 + x - a = 0$의 실근들이며, 이번에는 부호 제약이 없다.

> **생각해 보기** 이차방정식의 근이 $x = 1$과 같아지거나, 두 근이 서로 같아질 수 있을까?

두 경우 모두 일어나며, 바로 이 경우들이 해의 개수를 줄인다. 이차방정식은 $1 + 4a = 0$, 즉 $a = -\frac{1}{4}$일 때 중근(repeated root)을 가지며, 그 근은 $-\frac{1}{2}$이다. 또 $1 + 1 - a = 0$, 즉 $a = 2$일 때 $x = 1$이 이차방정식의 근이 된다. 이때 $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$이므로 근은 1과 -2이다.

이차방정식을 $a = x^2 + x$로 쓰면, 그 실근은 높이 a인 수평선이 포물선(parabola) $y = x^2 + x$와 만나는 점에 해당한다. 이 포물선의 꼭짓점(가장 낮은 점)은 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$이다. 추가로 생기는 해 $x = 1$은 포물선 위의 점 $(1, 2)$에 대응한다.



경우들을 종합하면, 서로 다른 실수해의 개수는 다음과 같다.

- $a < -\frac{1}{4}$: 이차방정식이 실근을 가지지 않으므로 해는 $x = 1$ **하나**이다.
- $a = -\frac{1}{4}$: 해는 1과 $-\frac{1}{2}$이므로 **두 개**이다.
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ 또는 $a > 2$: 이차방정식의 서로 다른 두 근이 있고 어느 것도 1이 아니며, 여기에 $x = 1$이 더해지므로 **세 개**이다.
- $a = 2$: 해는 1과 -2이므로 **두 개**이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)과 똑같이 제곱근은 음이 아니므로

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ 그리고 } x \geq 0,$$

이다($x \geq 0$이고 $b + x = x^2$이면 $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$이므로 역도 성립한다). 이제 $x^2 - x - b = 0$의 두 근의 합은 1, 곱은 $-b$이고, 판별식은 $1 + 4b$이다.

경우 $b < -\frac{1}{4}$. 실근이 없으므로 해가 **없다**.

경우 $b = -\frac{1}{4}$. 이차방정식은 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$이고 $x = \frac{1}{2} \geq 0$이므로 해는 **하나**이다.

경우 $-\frac{1}{4} < b < 0$. 서로 다른 두 실근이 있고, 곱 $-b$가 양수이므로 부호가 같으며, 합 1이 양수이므로 둘 다 양수이다. 해는 **두 개**이다.

경우 $b = 0$. 이차방정식은 $x(x - 1) = 0$이고, 0과 1 모두 음이 아니다. 해는 **두 개**이다. (실제로 $0 = \sqrt{0}$이고 $1 = \sqrt{1}$이다.)

경우 $b > 0$. 두 실근의 곱이 음수이므로 하나는 양수, 하나는 음수이다. 해는 **하나**이다.

정리하면, $b < -\frac{1}{4}$일 때 해가 없고, $b = -\frac{1}{4}$일 때 하나, $-\frac{1}{4} < b \leq 0$일 때 두 개, $b > 0$일 때 하나이다.

검산

- 그래프로 보면, 소문항 (ii)는 직선 $y = x$가 $(-b, 0)$에서 시작하는 반포물선 $y = \sqrt{b + x}$와 만나는 점을 묻는 것이다. $b = -\frac{1}{5}$일 때 해는 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$, 즉 약 0.276과 0.724이며, 둘 다 소수점 아래 여러 자리까지 $x = \sqrt{x - 0.2}$를 만족한다.
- $a = 2$인 세제곱근 방정식에서 $x = 1$과 $x = -2$ 모두 해가 된다. $(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$이다.
- 컴퓨터로 각 경계값$(-\frac{1}{4}, 0, 2)$의 양쪽에 걸친 여러 a, b 값에 대해 촘촘한 격자 위에서 각 방정식의 근을 세어 보았으며, 그 개수는 위의 경우 분석과 일치하였다.

흔한 실수

- 제곱한 뒤 $x \geq 0$이라는 조건을 잊는 것. 그러면 소문항 (i)에서 모든 $a > -\frac{1}{4}$에 대해 해가 두 개라는 틀린 결론이 나온다.
- 세제곱근 방정식에도 $x \geq 0$이라는 조건을 붙이는 것. 음수의 세제곱근도 엄연한 실수이다.
- $a = 2$인 경우를 놓치는 것. 이때는 일차 인수의 근 $x = 1$이 이차방정식의 근이기도 하므로, 세 해 가운데 두 개가 하나로 합쳐진다.

STEP 너머

핵심은 $\mathbb{R}$ 위에서 제곱은 되돌릴 수 있는 연산이 아니지만 세제곱은 그렇다는 점이다. $x \mapsto x^3$은 $\mathbb{R}$의 전단사(bijection)이지만 $x \mapsto x^2$은 그렇지 않으므로, 음이 아닌 가지(branch)를 택해야만 비로소 "그" 제곱근이 정의된다. $x = f(x)$ 꼴의 방정식을 고정점(fixed point) 문제로 보고, 매개변수가 변할 때 그 개수를 세는 것은 분기 이론(bifurcation theory)의 출발점이다. 이 이론에서 해는 쌍으로 생겨나거나($a = -\frac{1}{4}$에서처럼) 서로 자리를 맞바꾼다($a = 2$에서처럼). 함수, 역함수(inverse function), 연속성(continuity)에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.