풀이

STEP I 2009, 문제 2

순수수학 • 삼차곡선의 접선

> **STEP I 2009, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.9 절 **삼차곡선의 접선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/tangents-cubic.html

핵심 아이디어

접선(tangent)은 접점(point of contact)에서 곡선과 **두 번** 만난다. 즉 접선의 식을 곡선의 방정식에 대입하면 접점은 중근(repeated root)으로 나타난다. 삼차방정식(cubic)의 중근을 하나 알면 나머지 근은 인수분해(factorising)로 바로 얻어지고, 그 세 번째 교점은 유리수 좌표(rational coordinates)를 가진다는 것이 밝혀진다. 그런 다음 분모를 없애면 곡선의 방정식이 세제곱수의 합(sum of cubes)으로 바뀐다.

풀이

$(-a, b)$에서의 접선

먼저 $(-a, b)$는 실제로 곡선 위에 있다. $x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$이기 때문이다.

$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면(a와 b는 상수이다)

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

이고, 이는 $y \neq 0$인 모든 곳에서 성립한다. $b > 0$인 점 $(-a, b)$에서 기울기(gradient)는

a^2/b^2이다. 따라서 접선은

$$\begin{aligned} y - b &= \frac{a^2}{b^2}(x + a) \\ b^2y - b^3 &= a^2x + a^3 \\ b^2y - a^2x &= a^3 + b^3, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

$a = 1, b = 2$일 때의 교점

이제 곡선은 $y^3 = x^3 + 9$이고 $(-1, 2)$에서의 접선은 $4y - x = 9$, 즉 $y = \frac{1}{4}(x + 9)$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{(x+9)^3}{64} &= x^3 + 9 \\ x^3 + 27x^2 + 243x + 729 &= 64x^3 + 576 \\ 0 &= 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153. \end{aligned}$$

모든 계수(coefficient)가 9로 나누어떨어지므로, 양변을 나누면

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

이고, 이것이 문제에서 요구한 삼차방정식이다.

p, q, r, s 구하기

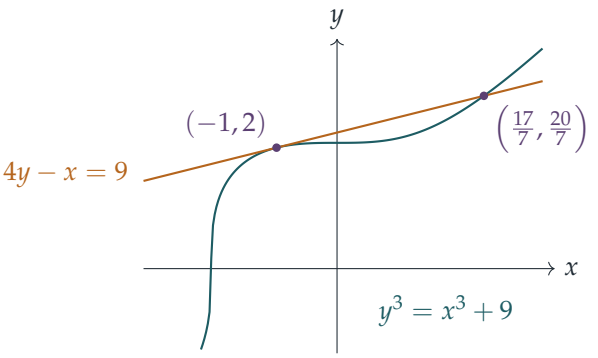
> **생각해 보기** 우리는 이 삼차방정식의 근 하나를 이미 알고 있다. 왜 그 근이 중근이어야 할까?

직선은 $x = -1$에서 곡선에 접하므로 $x = -1$은 중근이다. 접점 근처에서 직선과 곡선은 1차까지 일치하므로, 그 차는 그 점에서 2차까지 0이 된다. 따라서 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$은 인수이다. x^3의 계수와 상수항을 비교하면 나머지 인수는 $7x - 17$이어야 하며, 이를 확인할 수 있다.

$$(x+1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

따라서 접선은 $x = \frac{17}{7}$에서 곡선과 다시 만나고, 이때

$$y = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{17}{7} + 9\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{80}{7} = \tfrac{20}{7}.$$



이 점은 $y^3 = x^3 + 9$ 위에 있으므로

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

양변에 7^3을 곱하면 $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$이다. 마지막 항은 세제곱수가 아니지만, $9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$이므로

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

(바로 여기서 $a = 1, b = 2$인 원래의 꼴 $a^3 + b^3$이 다시 등장한다.) 그러므로

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

이고, $p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$로 잡을 수 있다(뒤의 세 수는 순서를 바꾸어도 된다).

검산

직접 계산하면 $17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$이다. 또한 삼차방정식의 세 근은 $-1, -1, \frac{17}{7}$이고, 그 합은 $\frac{3}{7}$, 곱은 $\frac{17}{7}$이다. 이는 계수에서 읽어 낸 $3/7, 17/7$과 일치한다. $y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$의 $x = -a$에서의 수치 미분값도 a^2/b^2과 일치한다.

흔한 실수

- 중근을 활용하지 않는 것: $(x+1)^2$으로 나누는 대신 삼차방정식을 처음부터 풀려고 한다.
- $20^3 = 17^3 + 3087$에서 멈추는 것. 우리가 필요한 것은 세제곱의 합이 되는 양의 정수들이므로, $3087 = 9 \cdot 7^3$을 $7^3 + 14^3$으로 쪼개야 한다.

STEP 너머

이것은 삼차 곡선에 대한 고전적인 **접선법**(tangent method)이다. 직선은 삼차 곡선과 중복도(multiplicity)를 세어 세 점에서 만나므로, 두 유리점(또는 이 문제처럼 두 번 세는 한 점)이 있으면 세 번째 유리점이 생긴다. 타원곡선(elliptic curve)에서는 이 현-접선 작도(chord-and-tangent construction)가 군 법칙(group law)이 되며, 이는 현대 정수론(number theory)의 넓은 분야의 출발점이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 다루고, 실버먼(Silverman)과 테이트(Tate)의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)는 그 기하를 본격적으로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.