풀이

STEP I 2009, 문제 12

확률과 통계 • 확률과 부등식

> **STEP I 2009, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q12

핵심 아이디어

여기서 구하는 각 확률(probability)은 봉지 속 사탕 개수들의 곱의 합을 전체 개수의 거듭제곱으로 나눈 것이므로, 모든 비교는 결국 a, b, c에 대한 두 다항식(polynomial)을 비교하는 문제가 된다. 처음에 나오는 부등식(inequality) $x^2 + y^2 \geq 2xy$가 바로 이를 위한 도구이다. 소문항 (ii)에서 "정확히 두 개가 같은 색"인 경우를 정면으로 세는 것은 번거롭다. 나머지 두 경우(모두 같은 색, 모두 다른 색)를 세어 1에서 빼는 편이 훨씬 쉽다.

풀이

부등식

임의의 실수 x와 y에 대하여

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0,$$

이다. 실수의 제곱은 절대 음수가 아니기 때문이다. 따라서 $x^2 + y^2 \geq 2xy$이고, 등호(equality)는 정확히 $x = y$일 때 성립한다.

소문항 (i)

각 봉지에는 사탕이 $a + b$개 들어 있고, 두 번의 뽑기는 서로 다른 봉지에서 이루어지므로 독립(independent)이다. 두 사탕의 색이 같은 사건(event)을 S, 색이 다른 사건을 D라 하자.

그러면

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\text{빨강, 빨강}) + \mathrm{P}(\text{파랑, 파랑}) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)^2},$$
$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(\text{빨강, 파랑}) + \mathrm{P}(\text{파랑, 빨강}) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$$

분모는 서로 같고 양수이며, 위의 부등식에 의해 $2ab \le a^2 + b^2$이다. 따라서 요구한 대로 $\mathrm{P}(S) \le \mathrm{P}(D)$이고, 등호는 $a = b$일 때만 성립한다.

소문항 (ii)

각 봉지에 든 사탕의 개수를 $n = a + b + c$라 하자. 봉지의 내용물은 다음과 같다.

	빨강	하양	노랑
봉지 1	a	b	c
봉지 2	b	c	a
봉지 3	c	a	b

세 번의 뽑기는 독립이므로, 각 봉지에서 (순서대로) 특정한 색이 나올 확률은 해당하는 세 개수의 곱을 n^3으로 나눈 값이다. 세 사탕이 모두 같은 색인 사건을 A, 정확히 두 개가 같은 색인 사건을 T, 세 개가 모두 다른 색인 사건을 E라 하자. 이 세 사건은 모든 경우를 빠짐없이 포함하며 서로 겹치지 않는다.

모두 같은 색. 표의 각 열을 위에서 아래로 읽으면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

모두 다른 색. 봉지 1, 2, 3에서 나온 색은 빨강, 하양, 노랑을 늘어놓는 $3! = 6$가지 순서 중 하나를 이룬다.

$$\text{RWY: } a\cdot c\cdot b \quad \text{RYW: } a\cdot a\cdot a \quad \text{WRY: } b\cdot b\cdot b$$
$$\text{WYR: } b\cdot a\cdot c \quad \text{YRW: } c\cdot b\cdot a \quad \text{YWR: } c\cdot c\cdot c$$

따라서

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

생각해 보기 나머지 18가지 결과를 일일이 나열하지 않고, 이 두 답으로부터 어떻게 $\mathrm{P}(T)$를 구할 수 있을까?

$\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$이므로, $n^3 = (a+b+c)^3$의 전개(expansion)가 필요하다. 이 전개식에는 세 개의 세제곱 항, a^2b와 같은 꼴의 여섯 항이 각각 계수 3으로, 그리고 abc가 계수 6으로 나타난다.

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a+b+c)^3},\end{aligned}$$

이고, 이것이 주어진 결과이다. 사탕이 모두 같은 색일 확률은

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a+b+c)^3}.$$

결론 이끌어 내기. 여섯 항을 공통인수를 가진 것끼리 묶는다.

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right).$$

처음의 부등식에 의해 $b^2 + c^2 \geq 2bc$이고, $a > 0$이므로 곱해도 부등호의 방향이 유지되어 $a(b^2 + c^2) \geq 2abc$이다. 마찬가지로 $b(c^2 + a^2) \geq 2abc$이고 $c(a^2 + b^2) \geq 2abc$이다. 이들을 더하면

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

양변에 $3/n^3 > 0$을 곱하면

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. 등호가 성립하려면 $b = c$, $c = a$, $a = b$가 동시에 성립해야 하므로, 등호는 $a = b = c$일 때만 성립한다.

검산

- $a = b = c$이면 모든 봉지에서 각 색이 3분의 1씩이므로 $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$이고 $\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$이며, 남은 값은 $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$이다. 이것이 등호가 성립하는 경우이다.
- $a, b, c = 1, 2, 3 (n = 6)$이면 $\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$이다. 이들의 합은 1이고, $\frac{2}{3}$은 $\frac{1}{12}$의 8배이다.
- 세 공식 모두를 1부터 8까지의 모든 a, b, c에 대하여 전수 조사(exact enumeration)로 확인했고, 시뮬레이션(simulation)으로도 확인했다($a, b, c = 2, 3, 5$일 때 200 000번의 시행에서 $\mathrm{P}(T)$의 정확한 값 0.66에 대해 0.659를 얻었다).

흔한 실수

- 봉지의 내용물을 잘못된 순서로 쓰는 것. 봉지 2에는 빨강이 a개가 아니라 노랑이 a개 들어 있다. 위와 같은 표를 만들면 이런 실수를 막을 수 있다.
- P(E)에서 모든 순서가 abc를 준다고 가정하는 것. 그런 순서는 세 가지뿐이며, RYW, WRY, YWR 순서는 각각 a^3, b^3, c^3을 준다.
- 부등식에 a, b, c를 곱할 때 $a, b, c > 0$임을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

마지막 부등식은 단항식(monomial)의 대칭(symmetric) 합을 비교하는 일반적인 법칙인 뮤어헤드 부등식(Muirhead's inequality)의 한 경우이다. 여기서 이 부등식은 a^2b 꼴의 항들의 합이 abc 꼴의 항들의 합보다 크거나 같다는 것을 말해 준다. 소문항 (i)은 같은 아이디어의 두 변수 경우이며, 둘 다 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 바탕을 둔다. 세기 논증과 여사건(complementary event)에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.