풀이

STEP I 2009, 문제 11

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP I 2009, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q11

핵심 아이디어

모든 일차원 충돌은 두 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)으로 결정된다. 에너지를 다루는 요령은 각 입자의 손실을 제곱의 차 $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$로 쓰는 것인데, 운동량 보존이 인수 $u-p$와 $q-v$를 서로 묶어 주기 때문이다. 공통인수 $u-p$를 묶어 내고 나면, 남은 괄호가 바로 반발 법칙이 기술하는 양이 된다.

풀이

입자들이 매끄러운 탁자 위의 한 직선을 따라 움직인다고 모형화하고, 속도는 $\mathbf{i}$ 방향으로 잰다. $u > v$이므로 질량 m인 입자가 뒤에 있다가 따라잡는다. 수평 방향의 외력이 없으므로 운동량이 보존된다.

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{따라서} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

뉴턴의 반발 법칙에 따르면 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다.

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



충돌 전($\mathbf{i}$ 방향 속도), $u > v$

소문항 (i)

운동 에너지(kinetic energy)의 손실은 다음과 같다.

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2 - p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2 - q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

(1)에 의해 $M(q-v)$를 $m(u-p)$로 바꿀 수 있으므로, 인수 $\frac{1}{2}m(u-p)$가 묶여 나온다.

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u+p) - (q+v)] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v) - (q-p)] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v) - e(u-v)] \qquad (2)\text{에 의해} \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

? **생각해 보기** 에너지 손실에 대한 공식이 어떻게 p에 관해 무언가를 알려 줄까?

충돌은 운동 에너지를 만들어 낼 수 없으므로 $\Delta \geq 0$이다. 곧 $\frac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$에서 $m > 0$, $u - v > 0$(주어진 조건), $1 - e > 0$($e < 1$이므로)이다. 따라서 Δ의 부호는 $u - p$의 부호와 같고, $\Delta \geq 0$이면 반드시 $u \geq p$이다. 질량 m인 입자는 **i** 방향으로 빨라질 수 없는데, M이 이 입자에 가하는 충격량(impulse)이 뒤쪽으로 작용하므로 이는 당연하다.

$\Delta \geq 0$을 물리적 사실로 받아들이고 싶지 않다면, (1)과 (2)를 직접 풀어도 된다.

$$p = \frac{mu + Mv - Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{따라서} \qquad u - p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

이고, 이는 $e \geq 0$일 때 성립한다. 이로써 $u \geq p$가 확인되고, 따라서 $\Delta \geq 0$이다.

소문항 (ii)

각 입자가 0이 아닌 같은 양의 에너지를 잃으므로

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

(1)에 의해 $M(v-q) = -m(u-p)$이므로 우변은 $-\frac{1}{2}m(u-p)(v+q)$이고

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

좌변이 0이 아니므로 $m(u-p) \neq 0$이고, 양변을 $\frac{1}{2}m(u-p)$로 나눌 수 있다.

$$u + p = -(v+q), \qquad \text{즉} \qquad u + v + p + q = 0. \tag{3}$$

이제 (2)와 (3)으로부터 p와 q의 합과 차를 얻는다.

$$p + q = -(u+v), \qquad q - p = e(u-v),$$

따라서

$$p = -\tfrac{1}{2}[(u+v)+e(u-v)], \qquad q = -\tfrac{1}{2}[(u+v)-e(u-v)].$$

아직 운동량 보존을 완전한 형태로는 쓰지 않았는데, 바로 그것이 e를 결정한다. $mp+Mq = mu+Mv$에 대입하고 양변에 2를 곱하면

$$\begin{aligned} -(m+M)(u+v)+(M-m)e(u-v) &= 2mu+2Mv, \\ (M-m)e(u-v) &= (m+M)(u+v)+2mu+2Mv \\ &= (M+3m)u+(3M+m)v. \end{aligned}$$

$u-v>0$이고 $m\neq M$이면 $M-m\neq 0$이므로, 나누어서

$$e = \frac{(M+3m)u+(3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

를 얻고, 이것이 원하는 결과이다.

검산

- $m=1, M=3, u=1, v=-\frac{1}{2}$로 두자. 공식에 의해 $e = \frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$이다. 그러면 $p=-\frac{1}{2}, q=0$이고, 운동량도 맞는다: $1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}+0$. 각 입자는 에너지 $\frac{3}{8}$을 잃고, $u+v+p+q = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0 = 0$이다.
- $e=1$이면 (i)의 공식은 손실이 0임을 주는데, 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)이라면 마땅히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 (i)은 무작위 충돌 2000개에 대해 정확한 분수로, (ii)는 $0\le e<1$인 무작위 경우 455개에 대해 검증하였다.

흔한 실수

- 반발 법칙을 거꾸로 쓰는 것: 올바른 식은 $q-p=e(u-v)$, 즉 멀어지는 속력을 다가오는 속력으로 나눈 것이며, 여기서는 둘 다 양의 값으로 잰다.
- $u-p$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 $u-p$로 나누는 것. 이 문제에서 "0이 아닌 양"이라는 표현은 바로 그 이유를 위해 들어 있다.

STEP 너머

(i)의 인수분해는 질량 중심계(centre-of-mass frame)에서 생각하면 자연스럽게 나오는 결과이다. 이 기준계에서는 전체 운동량이 0이고, 운동 에너지는 환산 질량(reduced mass)

$\mu = \frac{mM}{m+M}$을 써서 $\frac{1}{2}\mu$(상대 속력)^{2}이며, 손실은 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$이다. 환산 질량과 질량 중심계는 이체 궤도 문제와 입자 산란에서도 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 이 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.