풀이

STEP I 2009, 문제 10

역학 • 경사면 위의 연결된 입자

STEP I 2009, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

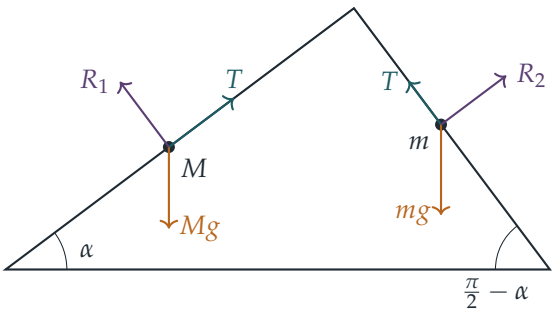
step.maths.org/questions/09-s1-q10

핵심 아이디어

줄이 늘어나지 않고(inextensible) 도르래(pulley)가 매끄러우므로(smooth) 두 입자는 하나의 계로 움직인다. 즉 M이 자신의 면을 따라 거리 s만큼 내려가면 m은 자신의 면을 따라 같은 거리 s만큼 올라가고, 장력(tension)은 양쪽에서 같다. 따라서 각 면을 따른 중력의 두 성분을 비교하고, 각 입자에 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면 공통 가속도를 얻는다. 마지막 부분은 하나의 변수 α에 대한 평범한 미적분 최대화 문제가 된다.

풀이

입자들을 매끄러운 면 위의 질점(point mass)으로 모형화하고, 가벼우며 늘어나지 않는 줄이 매끄러운 도르래에 걸려 있다고 하며, 계는 정지 상태에서 출발한다고 가정한다. T를 장력, R_1, R_2를 각각 M과 m에 작용하는 수직항력(normal reaction)이라 하자.



꼭짓점의 각은 $\pi - \alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$이므로 두 면은 서로 수직이다. 경사각이 α인 면을 따라 아래로 향하는 중력의 성분은 $Mg\sin\alpha$이고, 경사각이 $\frac{\pi}{2} - \alpha$인 면을 따라 아래로 향하는

성분은 $mg\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = mg\cos\alpha$이다. 수직항력은 면에 수직이므로 면을 따른 운동에는 아무런 역할을 하지 않는다.

소문항 (i)

"M은 자신의 면을 따라 아래로, m은 자신의 면을 따라 위로"인 방향을 양의 방향으로 잡고, 가속도를 a라 하자. 각 면을 따라 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg\sin\alpha - T = Ma, \\ m: &\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 T가 소거된다.

$$a = \frac{g\,(M\sin\alpha - m\cos\alpha)}{M+m}.$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha > 0$이므로

$$a > 0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

따라서 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$이면 정지 상태에서 출발한 계는 양의 방향으로 가속한다. 즉 요구된 대로 M이 자신의 면을 따라 미끄러져 내려간다.

> **생각해 보기** 줄이 팽팽하게 유지되어 이 방정식들이 올바른 방정식이라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

두 번째 방정식에서 $T = m(a + g\cos\alpha)$이고, 이는 $a > 0$일 때 양수이므로 줄이 팽팽하다는 가정과 모순이 없다. 또한 줄은 느슨해질 수 없다. 만약 느슨해진다면 각 입자는 자신의 면을 따라 **아래로** 미끄러져 둘 다 도르래에서 멀어질 것이고, 그러려면 더 긴 줄이 필요하기 때문이다.

소문항 (ii)

이제 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$이므로 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$이고, $\tan\alpha > \frac{m}{M}$이므로 소문항 (i)에 의해 이번에도 M이 아래로 움직인다. $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$를 대입하고 M을 약분하면

$$\begin{aligned} a &= \frac{g\,(M\sin\alpha - \frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha)}{M + \frac{1}{2}M\tan\alpha} = \frac{g\,(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha)}{1 + \frac{1}{2}\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)} \\ &= \frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$를 이용하였다. 이것이 구하는 가속도의 크기이다.

최대화. 비 m/M은 $\tan\alpha = 2m/M$을 통해 α를 결정하므로, 다음을 최대화하면 된다.

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \qquad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$와 몫의 미분법(quotient rule)을 이용하면

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\,(\tan\alpha+2) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha+2)^2}.$$

분자에 $\cos^2\alpha > 0$을 곱하고 $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$를 이용하면

$$\cos^2\alpha\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

따라서 $f'(\alpha)$의 부호는 $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\,(2-\tan^3\alpha)$의 부호와 같다. $\tan\alpha$가 0에서 ∞까지 증가할 때, 이 값은 $\tan^3\alpha < 2$인 동안 양수이고 $\tan^3\alpha > 2$가 되면 음수이다. 그러므로 f는 증가하다가 감소하며, 최댓값은 유일한 정상점(stationary point)

$$\tan^3\alpha = 2.$$

에서 얻어진다. (구간에서 $f > 0$이고 양 끝에서 $f \to 0$이므로 이것이 최댓값임을 알 수도 있다.) $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$을 이용하면 이 조건은

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{즉,} \qquad 4m^3 = M^3,$$

이 되어, 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 소문항 (i)의 극한 경우(limiting case): $m = 0$이면 $a = g\sin\alpha$로, 매끄러운 경사면 위의 입자 하나에 해당한다. 또 $\tan\alpha = m/M$이면 $a = 0$으로, 평형점에 해당한다.
- 최적점에서 $\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$이므로 $\alpha \approx 51.6^\circ$이고 $m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$이다. $(0, \frac{\pi}{2})$에서 f를 격자 탐색(grid search)한 결과 같은 α에서 최댓값 $f \approx 0.240$을 얻었으므로, 가장 큰 가속도는 약 $0.240g$이다.
- 임의의 질량과 각에 대해, $\tan\alpha = 2m/M$일 때마다 소문항 (i)의 일반 공식은 소문항 (ii)의 공식과 일치했고, 두 운동 방정식은 같은 양의 장력을 주었다.

흔한 실수

- m에 대해 $mg\sin\alpha$를 사용하는 것: m이 놓인 면의 경사각은 $\frac{\pi}{2} - \alpha$이므로 성분은 $mg\cos\alpha$이다.
- a가 α에만 의존한다는 것을 알아차리지 못한 채 m을 고정하고 M을 변화시키며(또는 그 반대로) 최대화하는 것. 모든 것을 α로 나타내면 일변수 문제가 된다.

STEP 너머

이처럼 물체들이 구속 조건으로 연결된 계는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 좌표 하나(여기서는 줄을 따라 움직인 거리 s)를 고르면 장력과 수직항력 같은 구속력(constraint force)은 자동으로 사라진다. 대학 1학년 과정에서는 이를 도르래, 진자를 비롯한 훨씬 많은 문제에 통하는 체계적인 방법으로 발전시킨다. 이 수준에서 뉴턴 역학을 명료하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.