풀이

STEP I 2009, 문제 1

순수수학 • 약수의 개수 세기

> **STEP I 2009, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

핵심 아이디어

$p^a q^b$ (p, q는 서로 다른 소수(prime))의 모든 약수(factor)는 $0 \le i \le a, 0 \le j \le b$인 $p^i q^j$ 꼴이고, 소인수분해의 유일성(unique factorisation)에 의해 (i, j)를 다르게 고르면 서로 다른 약수가 나온다. 따라서 약수의 개수는 곱 $(a+1)(b+1)$이며, 소수가 몇 개이든 같은 사실이 성립한다. 진약수(proper factor)의 개수를 세는 것은 단지 2를 빼는 것이므로, 두 소문항 모두 어떤 수를 곱으로 나타내는 문제가 된다.

풀이

1과 N을 포함하여 N의 양의 약수의 개수를 $d(N)$으로 나타내자. 서로 다른 소수 p_i와 $a_i \ge 1$에 대하여

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

이면, N의 양의 약수는 $0 \le e_i \le a_i$인 $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ 꼴이다. 각 e_i에 대하여 $a_i + 1$가지 선택이 있고, 소인수분해의 유일성에 의해 서로 다른 선택은 서로 다른 약수를 준다. 따라서

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

$N > 1$이면 약수 1과 N은 서로 다르므로, 진약수의 개수는 $d(N) - 2$이다.

소문항 (i)

$3^2 \times 5^3$에 대하여 $d = (2+1)(3+1) = 12$이므로, 진약수는 $12 - 2 = 10$개이다. 이것이 보이려던 것이다.

이제 $3^m \times 5^n$을 생각하자. 이것이 정수이면서 진약수를 가지려면 $m, n \ge 0$이어야 한다(3이나 5의 음의 거듭제곱은 다른 소수로 약분되지 않는다). 약수는 $0 \le i \le m, 0 \le j \le n$인

3^i5^j이므로 $d = (m+1)(n+1)$이다(이는 $m = 0$ 또는 $n = 0$인 경우도 포함한다). 따라서

$$(m+1)(n+1) = 12,$$

즉 12를 두 양의 정수의 순서 있는 곱으로 나타내야 한다. 그러한 곱은

$$1 \times 12, \quad 2 \times 6, \quad 3 \times 4, \quad 4 \times 3, \quad 6 \times 2, \quad 12 \times 1,$$

이고, 이로부터

$$(m,n) = (0,11),\ (1,5),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,1),\ (11,0).$$

을 얻는다. 역시 소인수분해의 유일성에 의해 각각은 서로 다른 정수를 준다. 이 가운데 $(2,3)$은 주어진 수이므로, 진약수가 10개인 이 꼴의 **다른** 정수는 정확히 **5**개이다. 바로 5^{11}, 3×5^5, $3^3 \times 5^2$, $3^5 \times 5$, 3^{11}이다.

소문항 (ii)

$d(N) = 426 + 2 = 428$이어야 하고,

$$428 = 2^2 \times 107,$$

이며, 여기서 107은 소수이다(2, 3, 5, 7로 나누어떨어지지 않고, $11^2 > 107$이다).

? **생각해 보기** N의 소인수분해는 어떤 모양일 수 있는가?

각 수 $a_i + 1$은 2 이상이고 그 곱은 428이다. 107이 소수이므로 그중 정확히 하나가 107의 배수이며, 그 값은 107, 214, 428 중 하나이다. 나머지 수들의 곱은 각각 4, 2, 1이다. 순서를 무시하면 $a_i + 1$의 목록으로 가능한 것은

$$\{428\}, \qquad \{214, 2\}, \qquad \{107, 4\}, \qquad \{107, 2, 2\},$$

이므로, 지수의 중복집합(multiset)은

$$\{427\}, \qquad \{213, 1\}, \qquad \{106, 3\}, \qquad \{106, 1, 1\}.$$

이다.

? **생각해 보기** 지수가 주어졌을 때, 어떤 소수에 그 지수를 붙여야 하는가?

주어진 지수 목록으로 N을 가능한 한 작게 만들려면 가장 작은 소수들을 사용하고, 가장 큰 지수를 가장 작은 소수에 붙여야 한다. 가장 작은 소수들을 쓰는 것이 최선임은 분명하다. 어떤 소수를 사용하지 않은 더 작은 소수로 바꾸면 N이 작아지기 때문이다. 또 $p < q$인데 p에 지수 a, q에 지수 b가 붙어 있고 $a < b$라면, 두 지수를 맞바꿀 때 N에는

$$\frac{p^b q^a}{p^a q^b} = \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a} < 1,$$

이 곱해지므로, 맞바꾸면 N이 작아진다. 따라서 각 모양에서 가장 좋은 후보는

$$2^{427}, \qquad 2^{213}\times 3, \qquad 2^{106}\times 3^3, \qquad 2^{106}\times 3\times 5.$$

이다. 이들을 비교하면 다음과 같다.

- $2^{106}\times 3\times 5 = 2^{106}\times 15 < 2^{106}\times 27 = 2^{106}\times 3^3$이다.
- $2^{106}\times 27 < 2^{106}\times 2^5 = 2^{111}$이고, 이는 $2^{213}\times 3$이나 2^{427}보다 훨씬 작다.

따라서

$$N = 2^{106}\times 3\times 5.$$

검산하면 $d(N) = 107\times 2\times 2 = 428$이므로, N의 진약수는 426개이다.

검산

- 작은 경우로, $3\times 5^5 = 9375$의 약수를 직접 나열해 보자. $i\in\{0,1\}$, $j\in\{0,\dots,5\}$인 3^i5^j로 약수가 12개 나오므로, 진약수는 10개이다.
- $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$를 만족하는 모든 지수 패턴 $2^a3^b5^c7^d$를 컴퓨터로 간단히 탐색하면, 가장 작은 것이 $2^{106}\times 15 \approx 1.22\times 10^{33}$이고 그다음이 $2^{106}\times 27$임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 6이라고 답하는 것: 문제는 **다른** 정수를 묻고 있으므로 주어진 수는 제외한다.
- $m=0$ 또는 $n=0$인 경우(즉 5^{11}과 3^{11})를 빠뜨리는 것: 이들도 요구된 꼴이다.
- 소문항 (ii)의 답이 가능한 한 많은 소수를 사용해야 한다고 가정하는 것: 107이 소수이므로 매우 큰 지수 하나가 강제되며, 실제로 선택할 수 있는 것은 인수 4를 어떻게 나누느냐뿐이다.

STEP 너머

함수 $d(N)$은 **곱셈적 함수**(multiplicative function)이다. 즉 m과 n이 서로소(coprime)이면 언제나 $d(mn) = d(m)d(n)$이며, 이것이 바로 여기서 사용한 곱 공식이다. 자신보다 작은 모든 수보다 약수가 더 많은 수를 라마누잔(Ramanujan)의 **고합성수**(highly composite numbers)라고 하며, 소문항 (ii)의 지수 맞바꾸기 논증은 라마누잔이 이 수들을 기술할 때

의 첫 단계이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 소인수분해의 유일성과 산술 함수(arithmetic function)에 대해 읽어 보기 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.