풀이

STEP III 2008, 문제 9

역학 • 마찰과 변하는 힘

STEP III 2008, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

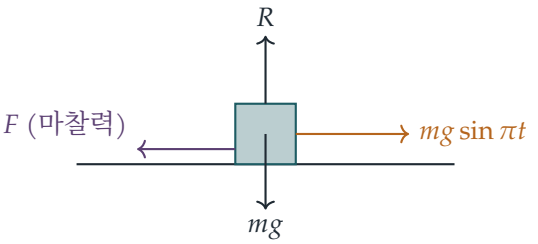
step.maths.org/questions/08-s3-q9

핵심 아이디어

마찰력(friction)에는 두 가지 상태가 있다. 입자가 정지해 있는 동안에는 정지 마찰력(static friction)이 한계값 μmg까지 가해진 힘과 정확히 같은 크기로 작용하므로 가속도는 0이다. 일단 입자가 미끄러지기 시작하면 마찰력은 일정한 크기 μmg를 가지며 속도의 반대 방향으로 작용한다. 따라서 가속도 그래프는 값이 0인 평평한 부분과 평행이동한 사인 곡선이 이어진 모양이 된다. "정지한다"는 것은 운동이 시작된 뒤로 가속도 그래프 아래의 넓이인 속도가 다시 0이 된다는 뜻이다.

풀이

물체를 거친 수평면 위의 입자로 모형화한다. 수직항력(normal reaction)은 $R = mg$이므로, 마찰력의 크기는 정지 상태에서는 최대 μmg이고 미끄러질 때는 정확히 μmg이다. $\sin \pi t > 0$일 때 힘이 작용하는 방향을 양의 방향으로 잡고, 가속도와 속도를 각각 a와 v라 하자.



움직이기 시작할 때

연직 방향으로 힘을 분해하면 $R = mg$이다. 입자가 정지해 있는 동안 수평 방향의 평형을 이루려면 크기가 $mg|\sin \pi t|$인 마찰력이 필요하고, 이는 $mg|\sin \pi t| \le \mu mg$인 한 가능하다. 입자는 가해진 힘이 처음으로 최대 정지 마찰력(limiting friction)을 넘어설 때 처음 움직이므로 ($\mu < 1$일 때)

$$\sin \pi T_0 = \mu, \qquad \text{즉,} \qquad T_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \mu, \quad 0 \le T_0 < \tfrac{1}{2}.$$

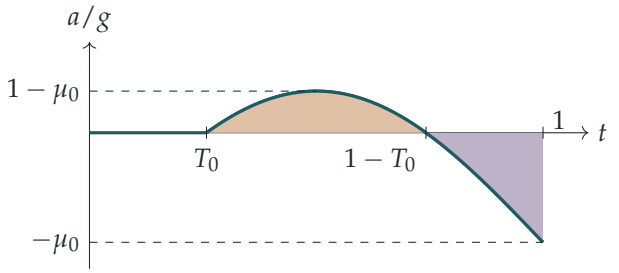
이다. ($\mu \ge 1$이면 입자는 결코 움직이지 않는다.)

소문항 (i)

$0 \le t \le T_0$에서 입자는 정지해 있으므로 $a = 0$이다. $t > T_0$에서는 입자가 양의 방향으로 미끄러지고 마찰력 $\mu_0 mg$가 뒤쪽으로 작용하므로, 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(second law)에 의해

$$a = g(\sin \pi t - \mu_0) \qquad (\text{단, } v > 0).$$

이다. 이 값은 $t = T_0$일 때 0에서 시작하여 $t = \frac{1}{2}$에서 $g(1 - \mu_0)$까지 커지고, ($\sin \pi(1 - t) = \sin \pi t$라는 대칭성에 의해) $t = 1 - T_0$에서 다시 0으로 떨어지며, 그 뒤로는 음수가 되어 $t = 1$에서 $-\mu_0 g$에 이른다.



속도는 T_0부터 잰 이 그래프 아래의 넓이이다. 곡선이 축 위에 있는 동안(호박색 영역)에는 속도가 커지고, $1 - T_0$ 이후(자주색 영역)에는 작아진다. 두 넓이가 같아질 때까지 속도는 양수로 유지되며, 바로 그 순간에 입자가 멈춘다. 따라서 다음이 성립해야 한다.

$$v(1) = \int_{T_0}^{1} g(\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

그런데

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{1} (\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t &= \Big[-\frac{\cos \pi t}{\pi}\Big]_{T_0}^{1} - \mu_0(1 - T_0) \\ &= \frac{1 + \cos \pi T_0}{\pi} - \mu_0 + \mu_0 T_0. \end{aligned}$$

이다. 이 값을 0으로 놓고 π를 곱하면

$$1 + \cos \pi T_0 - \mu_0 \pi + \mu_0 \, \pi T_0 = 0.$$

이다.

생각해 보기 $\cos \pi T_0$를 μ_0로 나타낼 때 부호는 어느 쪽을 택해야 하는가?

$0 \leq \pi T_0 < \frac{\pi}{2}$이므로 코사인 값은 양수이고, 따라서 $\cos \pi T_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \pi T_0} = (1 - \mu_0^2)^{1/2}$이다. 또한 $\pi T_0 = \arcsin \mu_0$이다. 두 식을 모두 대입하면

$$1 + \left(1 - \mu_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - \mu_0 \pi + \mu_0 \arcsin \mu_0 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (수치적으로는 $\mu_0 \approx 0.7246$이고 $T_0 \approx 0.258$이다.)

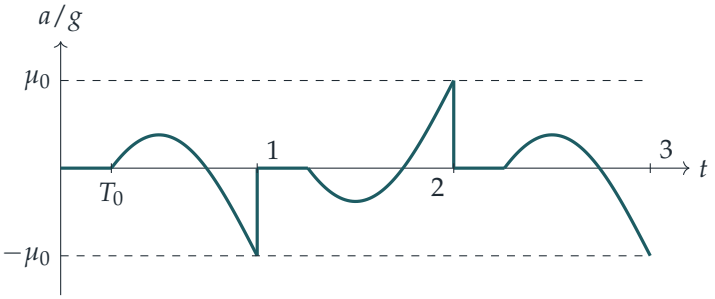
소문항 (ii)

$t = 1$에서 입자는 정지해 있고 가해진 힘은 $mg \sin \pi = 0$이다. $1 < t < 2$에서 힘은 음의 방향을 향하며 크기는 $mg|\sin \pi t|$이다. 이 값은 $|\sin \pi t| = \mu_0$가 될 때까지 $\mu_0 mg$보다 작은데, $(\sin \pi(1 + T_0) = -\sin \pi T_0$이므로) 이는 $t = 1 + T_0$에서 처음 일어난다. 따라서 $1 \leq t \leq 1 + T_0$에서 입자는 $a = 0$인 채로 정지해 있다.

그 뒤로 입자는 음의 방향으로 미끄러지고 마찰력은 양의 방향으로 작용하므로

$$a = g(\sin \pi t + \mu_0).$$

이다. $\sin \pi(t + 1) = -\sin \pi t$이므로, 이는 소문항 (i)에서 시각 $t - 1$일 때의 가속도에 정확히 음의 부호를 붙인 것이다. 따라서 $[1, 2]$에서의 운동은 $[0, 1]$에서의 운동을 거울에 비춘 것과 같다. 속도는 앞선 속도에 음의 부호를 붙인 것이므로, 입자는 같은 거리를 되돌아온 뒤 $t = 2$에서 다시 정지한다. 그때 입자는 가해진 힘이 0인 상태로 정지해 있는데, 이는 정확히 $t = 0$일 때의 상황이므로 $[2, 3]$에서는 $[0, 1]$의 운동이 반복된다.



$t = 1$과 $t = 2$에서의 수직 선분은 가속도가 불연속적으로 뛰는 곳을 나타낸다. 입자가 멈추는 순간 (크기가 $\mu_0 mg$인) 운동 마찰력(kinetic friction)이 정지 마찰력으로 바뀌는데, 정지 마찰력은 0인 가해진 힘과만 평형을 이루면 된다.

$\mu = \mu_0$일 때의 운동. 입자는 $t = T_0$까지 정지해 있다가 앞으로 미끄러져 $t = 1$에서 멈추고, $t = 1 + T_0$까지 기다렸다가 뒤로 미끄러져 $t = 2$에 출발점에서 멈추며, 이것이 계속 반복된다. 입자는 주기 2로 같은 구간을 왕복하며, 양 끝에서 각각 시간 T_0 동안 멈춘다. (한 번 더 적분하면 이 구간의 길이가 $g[\mu_0/\pi^2 - (1-T_0)(1-\sqrt{1-\mu_0^2})/(2\pi)] \approx 0.0367g$임을 알 수 있지만, 문제에서 묻지는 않았다.)

$\mu = 0$일 때의 운동. 이제 $T_0 = 0$이고 모든 시각에서 $a = g\sin\pi t$이므로

$$v = \frac{g}{\pi}(1-\cos\pi t) \geq 0, \qquad x = \frac{g}{\pi}\left(t - \frac{\sin\pi t}{\pi}\right).$$

이다. 속도는 결코 음수가 되지 않으며 $t = 0, 2, 4, \ldots$에서만 0이 된다. 따라서 입자는 결코 되돌아오지 않는다. 입자는 짝수 시각마다 순간적으로 정지하면서 밀려가듯 앞으로 나아가고, 주기 2마다 $2g/\pi$씩 전진하므로 평균 속력은 g/π이다. 거친 면의 경우 $t = 1$에서 입자를 멈추게 하는 것은 마찰력이다. 마찰이 없으면 힘의 뒤쪽 방향 절반은 입자의 속도를 0까지 줄일 뿐이다.

검산

소문항 (i)의 방정식을 이분법(bisection)으로 풀면 $\mu_0 \approx 0.72461$이고, 따라서 $T_0 \approx 0.25798$이다. $g = 9.8$로 두고 정지 마찰력과 운동 마찰력 사이를 전환하며 $0 \leq t \leq 3$에서 운동을 수치 시뮬레이션해 보면, 입자는 $t \approx 0.258$에서 움직이기 시작하여 0.3598만큼 이동한 뒤 $t = 1.000$에서 멈추고, $t \approx 1.258$에서 되돌아가기 시작하여 $t = 2.000$에 출발점에서 멈춘다. 이는 $0.0367g$와 일치한다. $\mu = 0$일 때 시뮬레이션 결과는 $x = g(t - \sin\pi t/\pi)/\pi$와 일치한다. 방정식에 대한 간단한 확인: $\mu_0 = 0$일 때 좌변은 $2 > 0$이고 $\mu_0 = 1$일 때는 $1 - \pi/2 < 0$이므로, $(0,1)$에 근이 존재한다.

흔한 실수

- $t = 0$부터 $a = g(\sin\pi t - \mu)$로 놓는 것: T_0 이전에는 입자가 정지해 있고 마찰력은 정지 마찰력이므로 $a = 0$이다.
- 소문항 (ii)에서 입자가 방향을 바꾼 뒤에도 마찰력을 같은 방향으로 두는 것. 마찰력은 언제나 속도의 반대 방향으로 작용한다.
- 입자가 $t = 1 - T_0$에서 멈춘다고 생각하는 것. 이때 0이 되는 것은 속도가 아니라 가속도이다.

STEP 너머

"달라붙음"과 "미끄러짐" 사이를 오가는 마찰력은 운동 방정식을 구간별로 정의되게 만들고 가속도를 불연속으로 만든다. 이것이 삐걱거리는 문이나 활로 켜는 바이올린 줄의 바탕이 되는 고착–미끄럼(stick–slip) 현상이며, 비매끄러운 동역학계(non-smooth dynamical system)의 첫 번째 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰 모형과 강제 운동을 알맞은 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.