풀이

STEP III 2008, 문제 8

순수수학 • 급수와 점화식

STEP III 2008, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q8

핵심 아이디어

계수가 선형 점화식(linear recurrence)을 만족한다는 것은 급수에 알맞은 다항식을 곱하면 거의 모든 항이 소거된다는 뜻이다. 그 다항식은 점화식에서 바로 읽어 낼 수 있다. $a_{r+1} + pa_r = 0$이면 $1 + px$를, $a_{r+2} + pa_{r+1} + qa_r = 0$이면 $1 + px + qx^2$를 곱하면 된다. 소거되지 않고 남는 것은 짧은 다항식이므로 합은 유리함수(rational function)가 된다. 유한합의 경우에는 같은 방법을 쓰면 맨 끝 쪽에 항이 몇 개 더 남는다. 또 다른 방법으로, 부분분수(partial fractions)를 이용하면 급수를 합을 구할 줄 아는 등비급수(geometric series)들로 나눌 수 있다.

풀이

소문항 (i)

이 급수는 x항부터 시작하므로 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{12}$이다. 각 계수는 바로 앞 계수의 절반이므로 $a_{r+1} - \frac{1}{2}a_r = 0$이고

$$p = -\tfrac{1}{2}.$$

이다. (상수항은 없다. 점화식은 $a_1, a_2, a_3, \ldots$을 서로 연결할 뿐이며 $r = 0$에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다.) 점화식을 풀면 $a_r = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$이다.

무한급수의 합. $1 - \frac{1}{2}x$를 곱하면

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}x\right) S = a_1 x + \sum_{r \geq 1} \left(a_{r+1} - \tfrac{1}{2}a_r\right) x^{r+1} = \tfrac{1}{3}x,$$

이다. 점화식에 의해 모든 괄호가 0이 되기 때문이다. 따라서

$$S = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{3(2-x)}.$$

이다. 이것은 공비가 $\frac{1}{2}x$인 등비급수이므로, 무한급수의 합은 정확히 $|x| < 2$일 때 존재한다.

처음 $n+1$개 항. 이들은 $x, x^2, \ldots, x^{n+1}$의 항이다. $S_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} a_r x^r$이라 하자. 같은 곱셈을 되풀이하면 가운데 항들은 여전히 모두 소거되지만, 맨 위 항 $-\frac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2}$는 짝이 없다.

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right) S_{n+1} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

그러므로 $x \neq 2$일 때

$$S_{n+1} = \frac{2x}{3(2-x)}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

이다. $x = 2$이면 모든 항이 $\frac{2}{3}$이므로 $S_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$이다.

소문항 (ii)

이번에는 $a_0 = 2, a_1 = 8, a_2 = 18, a_3 = 37$이다. 점화식에 $r = 0$과 $r = 1$을 대입하면 두 방정식

$$18 + 8p + 2q = 0, \qquad 37 + 18p + 8q = 0.$$

을 얻는다. 첫 번째 식에서 $q = -9 - 4p$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면 $37 + 18p - 72 - 32p = 0$이므로 $p = -\frac{5}{2}$이고, 따라서 $q = 1$이다. 점화식은

$$a_{r+2} - \tfrac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0.$$

이다.

무한급수의 합. $1 + px + qx^2 = 1 - \frac{5}{2}x + x^2$를 곱한다. 곱에서 x^{r+2}의 계수는 모든 $r \geq 0$에 대해 $a_{r+2} - \frac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0$이다. x^0과 x^1의 계수만 남는다.

$$\left(1-\tfrac{5}{2}x+x^2\right) T = a_0 + \left(a_1 - \tfrac{5}{2}a_0\right)x = 2 + 3x.$$

분자와 분모에 2를 곱하고 $2 - 5x + 2x^2 = (1-2x)(2-x)$로 인수분해하면

$$T = \frac{4+6x}{(1-2x)(2-x)}.$$

이다.

부분분수. $\dfrac{4+6x}{(1-2x)(2-x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{2-x}$라 하자. 가리기 방법(cover-up)을 $x=\frac{1}{2}$에서 쓰면 $A = \dfrac{7}{3/2} = \frac{14}{3}$이고, $x=2$에서 쓰면 $B = \dfrac{16}{-3} = -\frac{16}{3}$이다. 그러므로

$$T = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

이다. 각 항을 등비급수로 전개하면

$$a_r = \tfrac{14}{3}\,2^r - \tfrac{8}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^r.$$

이다. 확인해 보자. $r=0,1,2,3$을 넣으면 $2,\ \frac{28}{3}-\frac{4}{3}=8,\ \frac{56}{3}-\frac{2}{3}=18,\ \frac{112}{3}-\frac{1}{3}=37$이 되어 예상대로이다.

? **생각해 보기** 어떤 x에 대해 무한급수의 합이 실제로 존재하는가?

두 등비급수가 모두 수렴(converge)해야 하므로 $|2x|<1$이고 $|\frac{1}{2}x|<1$이어야 한다. 첫 번째 조건이 더 엄격하므로 $|x|<\frac{1}{2}$이어야 한다.

처음 $n+1$개 항. 이들은 x^0부터 x^n까지의 항이다. 각 등비급수를 $n+1$개 항까지 더하면, $x\neq\frac{1}{2}, 2$일 때

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \frac{14}{3}\cdot\frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{2-x}.$$

이다. (두 번째 분수는 $\frac{8}{3}\cdot\frac{1-(x/2)^{n+1}}{1-x/2}$의 분자와 분모에 2를 곱한 것이다.) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$이면, 해당하는 등비급수의 합은 단순히 1을 $n+1$번 더한 것이다.

검산

- $|x|<\frac{1}{2}$에서 $n\to\infty$로 보내자. 거듭제곱 $(2x)^{n+1}$과 $(x/2)^{n+1}$이 0으로 가므로 T의 부분분수 꼴을 다시 얻는다. 소문항 (i)에서도 $|x|<2$일 때 같은 일이 일어난다.
- $n=0$이면 소문항 (i)의 공식은 $\frac{2x}{3(2-x)}\cdot\frac{2-x}{2} = \frac{1}{3}x$를 준다. 소문항 (ii)의 공식은 $\frac{14}{3}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}=2$를 준다. 둘 다 예상대로 첫째 항이다.
- 수치로 확인하면, $x=0.3$에서 $T = \dfrac{5.8}{0.4\times 1.7} \approx 8.5294$이고, $2+8x+18x^2+37x^3+\cdots$의 부분합은 이 값에 가까워진다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 첫째 항을 a_0x^0으로 잡는 것. 급수는 x^1부터 시작하므로 처음 $n+1$개 항은 x^{n+1}까지 이어진다.

- **유한합**에 $1 + px$를 곱할 때 끝에 남는 항을 빠뜨리는 것. 바로 이 항들이 $(\frac{x}{2})^{n+1}$ 인수를 만들어 낸다.
- T에 대해 $|x| < 2$라고 쓰는 것. 원점에 더 가까운 근 $x = \frac{1}{2}$가 수렴반지름(radius of convergence)을 결정한다.

STEP 너머

거듭제곱급수(power series) $\sum a_r x^r$을 수열 (a_r)의 **생성함수**(generating function)라 한다. 상수 계수 선형 점화식은 언제나 유리함수인 생성함수를 주며, 그 함수의 극(pole)이 a_r의 닫힌 꼴과 수렴반지름을 모두 결정한다. 생성함수는 조합론과 확률론의 표준 도구이며, 거듭제곱급수의 수렴반지름은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 꼼꼼히 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 수렴에 관한 내용을 잘 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.