풀이

STEP III 2008, 문제 7

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2008, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q7

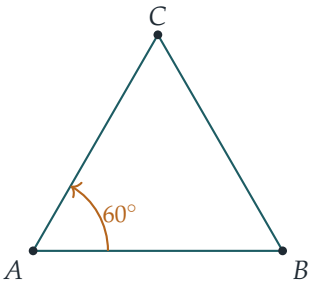
핵심 아이디어

아르강 도표(Argand diagram)에서 $e^{i\pi/3}$를 곱하는 것은 반시계 방향으로 $60°$ 회전(rotation)하는 것이다. 정삼각형(equilateral triangle)은 정확히 한 변을 한 꼭짓점을 중심으로 $60°$ 회전한 것이므로, 처음 관계식은 "정삼각형"이라는 조건을 a, b, c에 대한 일차방정식으로 바꾸어 준다. 그다음부터 두 소문항은 모두 장부 정리에 불과하다. 새로운 점을 모두 원래 점들로 나타낸 뒤, 원하는 조건을 확인하면 된다. 그 조건은 평행사변형(parallelogram)의 경우 $p + r = q + s$이고, 정삼각형의 경우 처음 관계식 그 자체이다.

풀이

처음 관계식

$\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$라 하자. ABC가 정삼각형이므로 AC는 AB와 길이가 같고, 그것과 $60°$의 각을 이룬다. 삼각형이 반시계 방향으로 기술되므로, $\overrightarrow{AB}$에서 $\overrightarrow{AC}$로 **반시계 방향으로** 돌아간다. 따라서 $\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AB}$를 $+60°$만큼 회전한 것이다.



$$c-a=\omega(b-a)=\tfrac{1}{2}(b-a)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(b-a),$$
$$2c=2a+(b-a)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a)=(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a),$$

이것이 구하는 결과이다.

삼각형이 시계 방향으로 기술되면 $\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AB}$를 $-60°$만큼 회전한 것이므로, $\bar{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$에 대하여 $c-a=\bar{\omega}(b-a)$이다. 같은 계산으로

$$2c=(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a).$$

를 얻는다. 역(converse)으로, 두 관계식 중 하나를 만족하는 c는 모두 ABC를 정삼각형으로 만든다. 각 관계식이 $c-a=\omega^{\pm1}(b-a)$와 동치이기 때문이다. 따라서 어떤 삼각형이 정삼각형임을 **보이려면** 이 관계식 중 하나를 확인하는 것으로 충분하다.

소문항 (i)

네 꼭짓점은 우리가 고를 수 있고, 각각은 해당 변의 어느 쪽에 두어도 된다. 꼭짓점이 c의 역할을 하도록 처음 결과를 이용하여 다음과 같이 놓자.

$$\begin{aligned}
2p&=(d+e)+\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d) && (D,E,P\text{ 반시계 방향}),\\
2q&=(e+f)-\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e) && (E,F,Q\text{ 시계 방향}),\\
2r&=(f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}(g-f) && (F,G,R\text{ 반시계 방향}),\\
2s&=(g+d)-\mathrm{i}\sqrt{3}(d-g) && (G,D,S\text{ 시계 방향}).
\end{aligned}$$

처음에 한 작업에 의해 PDE, QEF, RFG, SGD는 각각 정삼각형이 된다.

> ? **생각해 보기** 모든 삼각형을 변의 같은 쪽에 두지 않고, 왜 방향을 번갈아 바꾸는가?

직접 해 보자. $PQRS$가 평행사변형일 필요충분조건은 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$, 즉 $q-p=r-s$, 곧 $p+r=q+s$이다. (이는 대각선 PR과 QS의 중점이 같다는 뜻이다.) 위와 같이 선택하면

$$2(p+r)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f),$$
$$2(q+s)=(d+e+f+g)-\mathrm{i}\sqrt{3}\,(f-e+d-g)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f).$$

이다. 두 값이 같으므로 $p+r=q+s$이고 $PQRS$는 평행사변형이다. 만약 모두 "+" 부호를 썼다면 허수 부분은 $\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d+g-f)$와 $\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e+d-g)$가 되었을 것이다. 이 둘은 $d+f=e+g$일 때만, 즉 $DEFG$가 이미 평행사변형일 때만 일치한다. 부호를 번갈아 쓰는 것이 바로 모든 사각형에 대하여 $\sqrt{3}$ 항들을 맞추어 주는 것이다.

(어떤 사각형에서는 네 점이 우연히 한 직선 위에 있을(collinear) 수도 있는데, 이때는 퇴화된(degenerate) 평행사변형이 된다. 이 경우에도 조건 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$는 여전히 성립한다.)

소문항 (ii)

LMN이 시계 방향으로 기술되면 도형 전체를 실수축에 대하여 대칭이동한다(즉 켤레복소수(complex conjugate)를 취한다). 대칭이동은 정삼각형, 무게중심(centroid), 그리고 변 위의 삼각형이 바깥쪽으로 그려졌는지 여부를 보존하므로, LMN이 **반시계 방향으로** 기술되는 경우만 다루면 충분하다.

그러면 N은 방향이 있는 변 $L \to M$의 왼쪽에 있고, LM 위의 바깥쪽 삼각형 LMX는 꼭짓점 X가 오른쪽에 있으므로 L, M, X는 시계 방향으로 기술된다.

$$2x = (l+m) - \mathrm{i}\sqrt{3}(m-l).$$

LMX의 무게중심은

$$u = \tfrac{1}{3}(l+m+x) = \tfrac{1}{3}(l+m) + \tfrac{1}{6}(l+m) - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(m-l) = \frac{l+m}{2} + \frac{\mathrm{i}(l-m)}{2\sqrt{3}},$$

이다. 여기서 $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$을 이용했다. 반시계 방향의 순서를 유지하는 순환 치환 $l \to m \to n \to l$을 적용하면

$$v = \frac{m+n}{2} + \frac{\mathrm{i}(m-n)}{2\sqrt{3}}, \qquad w = \frac{n+l}{2} + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{2\sqrt{3}}.$$

을 얻는다. 이제 U, V, W가 반시계 방향 관계식 $2w = (u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)$를 만족함을 보이자. 먼저

$$\begin{aligned} u+v &= \tfrac{1}{2}l + m + \tfrac{1}{2}n + \frac{\mathrm{i}(l-n)}{2\sqrt{3}}, \\ v-u &= \tfrac{1}{2}(n-l) + \frac{\mathrm{i}(2m-l-n)}{2\sqrt{3}}, \\ \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(n-l) - \tfrac{1}{2}(2m-l-n). \end{aligned}$$

? **생각해 보기** m은 어떻게 사라지는가?

첫째 줄과 셋째 줄을 더한다. 실수 부분은 $\frac{1}{2}l + m + \frac{1}{2}n - m + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n = l + n$이 되므로, 실수 부분에서 m이 소거되고, 허수 부분에는 애초에 나타나지 않았다. 허수 부분을 합치면

$$(n-l)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)\mathrm{i} = (n-l)\,\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}.$$

이다. 따라서

$$(u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = (n+l) + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}} = 2w.$$

처음 결과(와 그 역)에 의해 UVW는 반시계 방향으로 기술되는 정삼각형이다. 이것이 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)이다.

검산

- 처음 관계식: $a = 0, b = 2$이면 $c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$인데, 이는 실수축 위쪽의 꼭짓점으로, 반시계 방향 삼각형에서 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $l = 0, m = 6, n = 6\mathrm{i}$일 때의 소문항 (ii): 공식에 의해 $u = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $v = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i})$, $w = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$이다. 이때 UVW의 세 변의 길이의 제곱은 모두 $24 + 12\sqrt{3}$이다.
- 처음 관계식들, 평행사변형 조건, 나폴레옹 정리를 무작위 배치 10^4개에 대하여 수치적으로 확인했다. 또한 소문항 (i)에서 모든 변에 같은 방향을 쓰면 일반적으로 성립하지 않음도 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 바깥쪽 방향을 잘못 잡는 것. 반시계 방향인 LMN에 대하여 LM 위의 바깥쪽 꼭짓점은 L, M에서 **시계 방향**이다. 부호를 잘못 쓰면 안쪽 나폴레옹 삼각형을 얻게 된다. (그것도 정삼각형이지만, 문제에서 묻는 것은 아니다.)
- 소문항 (i)에서 네 삼각형이 모두 같은 쪽을 향하게 하려는 것. 이는 $DEFG$ 자체가 평행사변형일 때만 성립한다.
- 평행사변형 판정에 $p + q = r + s$를 쓰는 것. 마주 보는 꼭짓점끼리 짝을 지어야 하므로, 조건은 $p + r = q + s$이다.

STEP 너머

근본적인 아이디어는 사상 $z \mapsto \alpha z + \beta$가 정확히 평면의 회전, 확대(enlargement), 평행이동(translation)이라는 것이다. 그래서 기하학적 조건이 $\mathbf{C}$ 위의 일차방정식이 된다. 처음 관계식을 깔끔하게 다시 쓰면, ABC가 정삼각형일 필요충분조건은 $a + \omega^2 b + \omega^4 c = 0$ 또는 $a + \omega^4 b + \omega^2 c = 0$이라는 것이고, 그러면 나폴레옹 정리는 몇 줄의 계산으로 곧바로 나온다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.