풀이

STEP III 2008, 문제 6

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP III 2008, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q6

핵심 아이디어

각 방정식은 y를 x와 기울기(slope) p로 직접 나타내지만, p에 대해 풀려 있지 않으므로 그냥 적분할 수는 없다. x에 대해 미분하면 y가 사라지고($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p$이므로) x, p, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 사이의 관계식이 남는다. 이 관계식을 뒤집으면 p의 함수로서의 x에 대한 **선형**(linear) 일계(first-order) 방정식이 되고, 이는 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있다. 그런 다음 $x(p)$를 원래 방정식에 다시 대입하여 y를 구한다.

풀이

소문항 (i)

$y = p^2 + 2xp$를 x에 대해 미분한다. 이때 p^2에는 연쇄법칙(chain rule)을, $2xp$에는 곱의 미분법(product rule)을 쓰고, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 p로 바꾼다.

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad -p = (2p + 2x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

> ? **생각해 보기** $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$를 뒤집어서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$를 얻어도 되는가?

$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$이어야 한다. 위 식을 보면 $p \neq 0$인 곳에서는 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$와 $2p + 2x$가 모두 0이 아니다. (어차피 p로 나누므로 처음부터 끝까지 $p \neq 0$이 필요하다.) 따라서

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2p + 2x}{p} = -2 - \frac{2x}{p},$$

로 쓸 수 있고, 이것이 요구된 결과이다.

이를 정리하면 x에 대한 선형 방정식이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}\,x = -2.$$

적분인자는 $\mathrm{e}^{\int 2/p\,\mathrm{d}p} = p^2$이고, 양변에 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -2p^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2x = -\tfrac{2}{3}p^3 + A \quad\Longrightarrow\quad x = -\tfrac{2}{3}p + Ap^{-2},$$

이다. 여기서 A는 임의의 상수이다. 이것이 문제에서 제시한 결과이다.

이제 $x = 2$일 때 $p = -3$이라는 조건을 쓰면

$$2 = -\tfrac{2}{3}(-3) + \frac{A}{9} = 2 + \frac{A}{9},$$

이므로 $A = 0$이고 $x = -\frac{2}{3}p$, 즉 $p = -\frac{3}{2}x$이다. 이를 원래 방정식에 대입하면

$$y = p^2 + 2xp = \tfrac{9}{4}x^2 + 2x\left(-\tfrac{3}{2}x\right) = \tfrac{9}{4}x^2 - 3x^2,$$

이므로

$$y = -\tfrac{3}{4}x^2.$$

검산해 보면 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x$로 실제로 p와 같고, $x = 2$에서 그 값은 -3이다.

소문항 (ii)

여기서는 $\ln p$가 나오므로 $p > 0$이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\ln p) = \ln p + 1$을 이용하여 $y = 2xp + p\ln p$를 x에 대해 미분하면

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (\ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad -p = (2x + \ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

앞에서와 마찬가지로 $p \neq 0$이면 반드시 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$이므로

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2x + \ln p + 1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}\,x = -\frac{\ln p + 1}{p}.$$

적분인자는 이번에도 p^2이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -p\ln p - p.$$

$u = \ln p$, $\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}p$로 놓고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int p\ln p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \int \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2,$$

이므로

$$\begin{aligned} p^2x &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + B \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2 + B, \end{aligned}$$

이고

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4} + Bp^{-2}.$$

$x = -\frac{1}{4}$일 때 $p = 1$이라는 조건을 쓰면 $-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + B$이므로 $B = 0$이고

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4},$$

이다. 이것이 보이라고 한 결과이다.

y를 구하기 위해, 이 식이 $\ln p = -2x - \frac{1}{2}$를 뜻한다는 데 주목하자. 모든 곳에 p를 대입하는 것보다 이것을 원래 방정식에 대입하는 편이 더 빠르다.

$$y = 2xp + p\left(-2x - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}p,$$

그리고 $p = \mathrm{e}^{-2x-1/2}$이므로

$$y = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}}.$$

검산: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}} = p$로 마땅히 그래야 하는 대로이고, $x = -\frac{1}{4}$에서 그 값은 $\mathrm{e}^0 = 1$이다.

검산

각 소문항에서 최종적으로 얻은 y를 미분하여, 그 도함수가 실제로 사용한 p와 같은지 확인한다. $y = -\frac{3}{4}x^2$이면 $p = -\frac{3}{2}x$이고, $p^2 + 2xp = \frac{9}{4}x^2 - 3x^2 = y$이다. 소문항 (ii)에서 $x = 0$일 때 $p = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$이고 $2xp + p\ln p = 0.6065 \times (-0.5) \approx -0.3033 = y(0)$이다. 또한 수치 검산을 통해, 임의로 고른 A와 B 값에 대해 일반적인 매개변수 곡선(parametric curve) $(x(p), y(p))$의 기울기 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 p와 같음을 확인하였다.

흔한 실수

- 좌변의 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 p라는 사실을 잊어서, 소거되고 $-p$가 남는 것을 보지 못하는 실수.
- 초기 조건(initial condition)을 쓰기 전에 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 실수. 여기서는 마침 그 값이 0이 되지만, 그것은 실제로 구해 본 뒤에야 알 수 있다.
- 소문항 (ii)에서 $p\ln p$를 x에 대해 미분할 때 $\ln p$만 쓰고, 인수 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$와 추가 항 $+1$을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

$y = xf(p) + g(p)$ 꼴의 방정식을 달랑베르(d'Alembert) 방정식(또는 라그랑주(Lagrange) 방정식)이라 하고, 특수한 경우인 $y = xp + g(p)$를 클레로(Clairaut) 방정식이라 한다. p를

독립변수(independent variable)로 다루는 방법은 이 모든 방정식에 통한다. 이 방정식들은 **특이해**(singular solutions)를 가질 수도 있는데, 특이해는 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$로 나누었던 곳에서 생기며 일반해(general solution)들이 이루는 곡선족의 포락선(envelope)이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 방정식과 그 풀이 방법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.