풀이

STEP III 2008, 문제 5

순수수학 • 점화식

> **STEP III 2008, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q5

핵심 아이디어

양 $\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$은 이 점화식(recurrence)의 **불변량**(invariant)이다. n을 하나 늘리면 점화식에 의해 $\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1}$을 $2x\mathrm{T}_n$으로 바꿀 수 있으므로 차가 사라진다. 불변량이 0이면 이웃한 항의 비가 모두 같으므로 수열은 등비수열(geometric sequence)이 된다. 이제 등비수열을 점화식에 대입하면 공비(common ratio)가 어떤 이차방정식(quadratic)의 근으로 결정된다.

풀이

이 풀이 전체에서 x는 고정되어 있고, $\mathrm{T}_n(x)$를 T_n으로, $\mathrm{f}(x)$를 f로 쓴다. 점화식 $(*)$는 다음을 뜻한다.

$$\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} = 2x\,\mathrm{T}_n \qquad (n \geq 1).$$

불변량

$n \geq 1$에 대하여 $D_n = \mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$이라 하자. 모든 $n \geq 1$에 대하여 $D_n = f$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(*base case*). $D_1 = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2$이고, 이는 정의에 의해 f이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $D_k = f$라 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} D_{k+1} - D_k &= \mathrm{T}_{k+1}^2 - \mathrm{T}_k\mathrm{T}_{k+2} - \mathrm{T}_k^2 + \mathrm{T}_{k-1}\mathrm{T}_{k+1} \\ &= \mathrm{T}_{k+1}(\mathrm{T}_{k+1} + \mathrm{T}_{k-1}) - \mathrm{T}_k(\mathrm{T}_{k+2} + \mathrm{T}_k) \\ &= \mathrm{T}_{k+1} \cdot 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_k \cdot 2x\mathrm{T}_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다. 여기서 셋째 줄에서는 첫째 괄호에 $n = k$인 $(*)$를, 둘째 괄호에 $n = k+1$인 $(*)$를 사용하였다($k \geq 1$이므로 둘 다 사용할 수 있다). 따라서 $D_{k+1} = D_k = f$이고, 수학적 귀납법에 의해

$$\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1} = f \quad \text{모든} n \geq 1$$

이 성립한다. 이로써 증명이 끝난다.

$f \equiv 0$인 경우

먼저 $f = 0$이 $r = \mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0$에 대하여 무엇을 말해 주는지 살펴보자. $n = 1$인 $(*)$에 의해 $\mathrm{T}_2 = 2x\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0$이므로, $\mathrm{T}_1 = r\mathrm{T}_0$으로 쓰면

$$f = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0(2x\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0) = \mathrm{T}_0^2(r^2 - 2xr + 1)$$

이다. 그러므로 $\mathrm{T}_0 \neq 0$이므로

$$f = 0 \iff r^2 = 2xr - 1. \tag{†}$$

> **생각해 보기** 불변량에 의하면 $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$이므로 비가 모두 같다. 그냥 나누면 되지 않을까?

T_{n-1}로 나누려면 그것이 0이 아니어야 하고, 이를 보이려면 추가 논증이 필요하다. "비가 모두 같다"는 생각으로 답을 추측한 다음, (†)를 이용하여 점화식 자체로 증명하는 편이 더 깔끔하다.

주장. 모든 $n \geq 0$에 대하여 $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0\, r^n$이다.

증명. 강한 귀납법(strong induction)을 사용한다(이웃한 두 경우를 한꺼번에 다룬다). $n = 0$일 때 주장은 자명하게 성립하고, $n = 1$일 때는 r의 정의에 의해 $\mathrm{T}_1 = r\mathrm{T}_0$이므로 성립한다. $k \geq 1$에 대하여 $n = k-1$과 $n = k$일 때 주장이 성립한다고 가정하자. 그러면 $(*)$에 의해

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{k+1} &= 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1} = 2x\mathrm{T}_0 r^k - \mathrm{T}_0 r^{k-1} \\ &= \mathrm{T}_0 r^{k-1}(2xr - 1) = \mathrm{T}_0 r^{k-1} \cdot r^2 = \mathrm{T}_0 r^{k+1} \end{aligned}$$

이고, 넷째 단계에서 (†)를 사용하였다. 따라서 $n = k+1$일 때도 주장이 성립하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x) = \mathrm{T}_0(x)\,(\mathrm{r}(x))^n}$$

$\mathrm{r}(x)$의 가능한 꼴

(†)에 의해 r은 $r^2 - 2xr + 1 = 0$을 만족하므로, 근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$\mathrm{r}(x) = x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{또는} \qquad \mathrm{r}(x) = x - \sqrt{x^2-1}$$

이다. 역으로 어느 쪽을 택하든 (†)를 만족하므로 $f \equiv 0$이고, 수열 $\mathrm{T}_0 r^n$은 실제로 $(*)$를 만족한다. 두 근의 곱은 1이므로 두 근은 서로 역수이다. $|x| < 1$이면 두 근은 복소수 $x \pm \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$이고, $x = \cos\theta$로 쓰면 두 근은 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$가 되며 $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}n\theta}$이다.

검산

- 체비쇼프(Chebyshev) 다항식 $\mathrm{T}_0 = 1, \mathrm{T}_1 = x, \mathrm{T}_2 = 2x^2 - 1$을 택하면 $f = x^2 - (2x^2 - 1) = 1 - x^2$이고, 실제로 모든 n에 대하여 $\cos^2 n\theta - \cos(n-1)\theta\cos(n+1)\theta = \sin^2\theta$이다. $x = \frac{3}{7}$이면 D_n의 처음 열네 개 값이 모두 $\frac{40}{49}$이다.
- $r = 2$로 택하면 $x = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$이고, $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1 = 2$로 두자. 점화식에 의해 $\mathrm{T}_2 = \frac{5}{2}\cdot 2 - 1 = 4$, $\mathrm{T}_3 = \frac{5}{2}\cdot 4 - 2 = 8$이므로, 주장대로 2의 거듭제곱이 나온다. 또한 $x - \sqrt{x^2-1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$는 다른 한 근이다.

흔한 실수

- $n = 0$인 $(*)$를 적용하는 것: 점화식은 $n = 1$부터 시작하므로 기저 단계는 D_0이 아니라 D_1이어야 한다(D_0은 정의조차 되지 않는다).
- T_{n-1}이 0이 아님을 확인하지 않고 $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$을 T_{n-1}로 나누는 것.

STEP 너머

상수계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)의 해는 $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ 꼴이며, 여기서 r_1, r_2는 특성방정식(characteristic equation)의 근이고, 이 문제에서 특성방정식은 $r^2 - 2xr + 1 = 0$이다. 조건 $f = 0$은 정확히 등비수열 항 하나만 남는 경우를 골라내며, 일반적으로 f는 $\alpha\beta$의 상수배이다. 불변량 D_n은 이계 미분방정식(second-order differential equation)의 론스키안(Wronskian)의 이산판이라 할 수 있는데, 론스키안은 $y'' + q(x)y = 0$에 대하여 상수이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정

식)에서 론스키안을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 점화식 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.