풀이

STEP III 2008, 문제 4

순수수학 • 역쌍곡선함수 부등식

STEP III 2008, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q4

핵심 아이디어

$x = \cosh y$로 놓는다. 반각 공식(half-angle formula)을 쓰면 $\tanh(y/2)$가 x에 대한 대수함수(algebraic function)로 바뀌므로, tanh에 관한 자명한 부등식(inequality)이 arcosh에 관한 자명하지 않은 부등식이 된다. 그다음부터 이 문제는 작은 기계 하나를 돌린다. 부등식을 1부터 x까지 적분하고 정리하면 더 정밀한 부등식을 얻는다. 이 기계를 두 번 돌리면 (ii)가, 이어서 (iii)이 나온다.

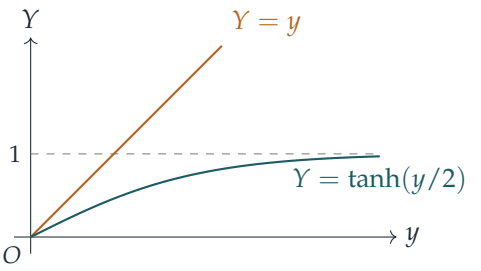
풀이

이 풀이 전체에서 $x \geq 1$에 대하여 $A(x) = \operatorname{arcosh} x$, $S(x) = \sqrt{x^2 - 1}$로 쓴다. 앞으로 필요한 두 도함수(derivative)는 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1).$$

소문항 (i)

곡선 $Y = \tanh(y/2)$는 원점을 기울기(gradient) $\frac{1}{2}$로 지나고, $y > 0$에서 위로 볼록(concave)이며, 결코 1에 도달하지 않는다. 반면 직선 $Y = y$의 기울기는 1이다.



모든 $y > 0$에 대하여 직선은 곡선보다 위에 있다. 이를 엄밀하게 보이기 위해 $g(t) = t - \tanh t$로 놓자. 그러면 $g(0) = 0$이고

$$g'(t) = 1 - \operatorname{sech}^2 t = \tanh^2 t > 0 \quad \text{단, } t > 0,$$

이므로 g는 순증가(strictly increasing)하고, $t > 0$이면 $\tanh t < t$이다. $t = y/2$로 놓으면

$$\tanh(y/2) < \tfrac{1}{2}y < y \qquad (y > 0).$$

이제 $x > 1$이라 하고 $y = \operatorname{arcosh} x$로 놓으면 $y > 0$, $\cosh y = x$이고 $\sinh y = +\sqrt{x^2 - 1}$이다($y > 0$이므로 양수이다). $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2}\cosh \frac{y}{2}$와 $1 + \cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$를 이용하면

$$\tanh \frac{y}{2} = \frac{\sinh y}{1 + \cosh y} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

따라서 $y > \tanh(y/2)$는

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

이 되고, 이것이 바로 $(*)$이다.

소문항 (ii)

$x > 1$을 고정하고, t를 변수로 하여 $(*)$를 $[1, x]$에서 적분한다.

> **생각해 보기** $(*)$의 우변은 분모에 $\sqrt{t^2 - 1}$이 있다. $t = 1$부터 적분해도 괜찮을까? 또 적분한 뒤에도 부등식이 **등호 없이** 성립할까?

두 가지 모두 그렇다. $t > 1$일 때 $\dfrac{t - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} = \sqrt{\dfrac{t - 1}{t + 1}}$이고, 이는 $t \to 1$일 때 0으로 수렴하므로 양변 모두 $[1, x]$에서 연속이다. 두 변의 차는 연속이고 $(1, x]$에서 순양수이므로, 그 차를 $[1, x]$에서 적분한 값도 순양수이다.

좌변은 $u = \operatorname{arcosh} t$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int_1^x \operatorname{arcosh} t \, \mathrm{d}t = \Big[t \operatorname{arcosh} t\Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = x\,A(x) - S(x),$$

이다. $\operatorname{arcosh} 1 = 0$이고 $\sqrt{1^2-1} = 0$이기 때문이다.

우변은 두 개의 기본적인 적분으로 나뉜다.

$$\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = S(x) - A(x).$$

그러므로

$$x\,A(x) - S(x) > S(x) - A(x) \quad\Longrightarrow\quad (x+1)A(x) > 2S(x).$$

$x+1>0$으로 나누고 소문항 (i)에서처럼 정리하면

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 2\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

이 되어 증명이 끝난다. 이것은 정확히 $(*)$의 하계의 두 배이다.

소문항 (iii)

소문항 (ii)에 따르면 $t>1$일 때 $\operatorname{arcosh} t > 2\cdot\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$이다. 즉 $(*)$와 같은 우변을 두 배 한 것이다. 그러므로 같은 기계를 다시 돌린다. 앞에서와 같은 근거로 $[1,x]$에서 적분하고 이미 구한 두 적분을 이용하면

$$x\,A(x) - S(x) > 2\big(S(x) - A(x)\big) \quad\Longrightarrow\quad (x+2)A(x) > 3S(x).$$

$x+2>0$이므로

$$\operatorname{arcosh} x > 3\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \qquad (x>1),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

> ? **생각해 보기** 왜 여기서 멈출까? 한 번 더 적분할 수는 없을까?

이 기계가 돌아가려면 우변이 적분을 알고 있는 $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$의 상수배여야 한다. 새 하계 $3\sqrt{t^2-1}/(t+2)$는 그런 꼴이 아니므로, 이 방법은 여기서 바닥난다.

독립적인 검증으로("otherwise" 경로), $f(x) = A(x) - 3S(x)/(x+2)$로 놓자. 그러면 $f(1)=0$이고, 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 3x(x+2) + 3(x^2-1)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad (x>1),$$

이므로 f는 순증가하고, 앞에서와 마찬가지로 $x>1$이면 $f(x)>0$이다.

검산

$x = 2$에서 $\operatorname{arcosh} 2 = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1.3170$이고, 세 하계는 $1/\sqrt{3} \approx 0.577$, $2/\sqrt{3} \approx 1.155$, $3\sqrt{3}/4 \approx 1.299$이다. 각 하계는 앞의 것보다 나으며, 모두 1.3170보다 작다. $x = 1$ 근처에서는 하계가 매우 정확해진다. $x = 1.001$에서 $\operatorname{arcosh} x \approx 0.04471763$인데, (ii)의 하계는 약 7×10^{-6}만큼, (iii)의 하계는 겨우 약 10^{-9}만큼 모자란다. 각 하계가 $x - 1$에 대하여 더 높은 차수까지 $\operatorname{arcosh} x$와 일치하기 때문이다. 두 적분을 수치적으로 검증하고($x = 1.5, 2, 5$에서 중점 구적법(midpoint quadrature)으로), 세 부등식을 무작위로 고른 10 000개의 $x > 1$에서 확인했지만 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- 부호를 정하지 않고 $\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$로 두는 것. $\operatorname{arcosh} x > 0$이므로 양의 제곱근이다.
- 1 대신 0부터 적분하는 것. arcosh는 $x \geq 1$에서만 정의되며, 아래끝이 1이어야 경계항이 사라진다.
- 적분한 부등식이 왜 여전히 등호 없이 성립하는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

하계가 점점 좋아지는 것은 적분할 때마다 $x = 1$에서 오차가 사라지는 차수가 하나씩 높아지기 때문이다. 이것은 점점 더 정확해지는 유리식 꼴 근사들의 수열(sequence)의 시작이며, 파데 근사(Padé approximants)와 가까운 친척이다. 풀이 전체에서 쓴 원리($f(a) = 0$이고 $f' > 0$이면, 또는 이를 적분한 형태이면, $f > 0$)는 모습을 바꾼 평균값 정리(mean value theorem)이며, 해석학의 상당 부분이 이 원리 위에 서 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 적분을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.