풀이

STEP III 2008, 문제 3

순수수학 • 타원의 접선과 초점

STEP III 2008, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

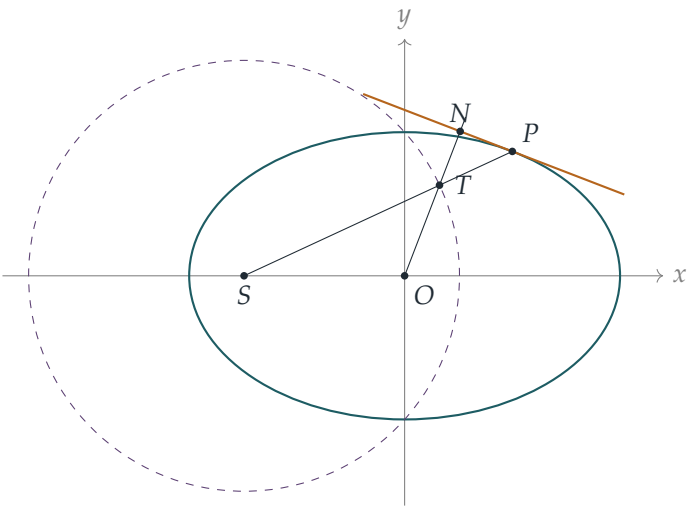
step.maths.org/questions/08-s3-q3

핵심 아이디어

이 문제는 처음부터 끝까지 두 직선에 관한 것이므로, 할 일은 두 직선의 방정식을 깔끔하게 쓰고 교점을 구하는 것이다. 직선 ON은 접선(tangent)에 수직이므로 그 방향은 접선의 법선벡터(normal vector)이고, 이는 접선의 방정식에서 바로 읽어 낼 수 있다. SP를 S에서 출발하도록 매개변수화(parametrisation)하면 교점은 한 줄 계산으로 구해지며, 이때 얻는 매개변수(parameter)가 바로 원에 관한 부분에 필요한 값이다. 그 값은 점 T가 SP 위에서 전체 길이의 몇 분의 몇 지점에 있는지를 알려 준다.

풀이

풀이 전체에서 $0 < e < 1$이다. $e^2 = 1 - b^2/a^2$이고, $a > b > 0$이므로 이 값은 0과 1 사이에 (양 끝을 제외하고) 놓인다. 또한 $\sin\theta \neq 0$이라고 가정한다. 만약 $\sin\theta = 0$이면 $P = (\pm a, 0)$이고 접선은 $x = \pm a$, $N = P$가 되며, ON과 SP가 모두 x축이 되므로 T가 정의되지 않는다.



(그림은 $a = 3, b = 2, \theta = 60°$인 경우이다. 타원(ellipse)은 청록색, P에서의 접선은 호박색이며, 점선으로 그린 원은 중심이 S이고 반지름이 a이다.)

T의 y좌표

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하거나 잘 알려진 결과를 이용하면, (x_1, y_1)에서의 접선은 $xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$이다. P에서 이는

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1.$$

이다. 직선 $px + qy = 1$의 법선벡터는 (p, q)이므로, 접선의 법선은 $(\frac{\cos\theta}{a}, \frac{\sin\theta}{b})$이고, ab를 곱하면 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$이다. 직선 ON은 O를 지나고 이 방향을 가지므로(접선에 수직이므로) 그 위의 점은 $\mu(b\cos\theta, a\sin\theta)$이고, 방정식은

$$a\sin\theta\, x = b\cos\theta\, y. \tag{1}$$

이다.

이제 SP를 S에서 출발하도록 매개변수화하자. 그 위의 점은

$$(-ea + \lambda a(\cos\theta + e),\ \lambda b\sin\theta),$$

이고, S에서 $\lambda = 0$, P에서 $\lambda = 1$이다. 이를 (1)에 대입하고 인수 $\sin\theta \neq 0$을 약분하면

$$a(-ea + \lambda a(\cos\theta + e)) = \lambda b^2\cos\theta$$
$$\lambda(a^2\cos\theta + a^2e - b^2\cos\theta) = ea^2.$$

이다. 바로 여기서 초점(focus)에 관한 조건이 제 몫을 한다. $a^2 - b^2 = a^2e^2$이므로 괄호 안은 $a^2e^2\cos\theta + a^2e = a^2e(1 + e\cos\theta)$이다. $a^2e \neq 0$으로 나누면

$$\lambda = \frac{1}{1 + e\cos\theta},$$

이고, $1+e\cos\theta \geq 1-e > 0$이므로 이 나눗셈은 정당하다. 따라서 T의 y좌표는

$$y_T = \lambda b\sin\theta = \frac{b\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. (나중을 위해 덧붙이면, (1)로부터 $x_T = \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\,y_T = \dfrac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$이다.)

T는 중심이 S이고 반지름이 a인 원 위에 있다

> ? **생각해 보기** 선분 ST가 SP의 몇 분의 몇인지는 이미 안다. 그 밖에 무엇이 더 필요할까?

$\lambda > 0$이고 $T = S + \lambda(P-S)$이므로 $ST = \lambda SP$이다. 따라서 P의 초점 거리(focal distance)인 길이 SP만 구하면 된다.

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\theta + ea)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2[\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2 + (1-e^2)\sin^2\theta] \\ &= a^2[(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + 2e\cos\theta + e^2(1-\sin^2\theta)] \\ &= a^2[1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta] = a^2(1+e\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

여기서 둘째 줄에서 $b^2 = a^2(1-e^2)$을 이용하였다. $a > 0$이고 $1+e\cos\theta > 0$이므로 $SP = a(1+e\cos\theta)$이다. 따라서

$$ST = \lambda SP = \frac{a(1+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} = a,$$

이므로 T는 중심이 S이고 반지름이 a인 원 위에 있다.

(좌표로 직접 계산하고 싶다면, $x_T + ea = \dfrac{a(\cos\theta+e)}{1+e\cos\theta}$이고, $(x_T+ea)^2 + y_T^2$은 위의 SP^2와 똑같은 계산으로 a^2이 된다.)

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$이면 $P = (0,b)$이고 접선은 $y = b$이므로, ON은 y축이고 $T = (0, y_T)$이며 공식에서 $y_T = b$이다. 그러면 $ST^2 = e^2a^2 + b^2 = a^2$으로, 예상대로이다.
- $a = 3$, $b = 2$, $\theta = 60°$(그림의 경우)일 때 두 직선의 교점을 수치로 구하면 $T \approx (0.4857, 1.2618)$이다. 공식은 $y_T = \sqrt{3}/(1+\sqrt{5}/6) \approx 1.2618$을 주고, $ST \approx 3.0000$이다.
- 원이 되는 극한 $e \to 0$에서는 $S \to O$, $T \to P$이며, 이 점은 실제로 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에 있다.

흔한 실수

- ON을 접선에 수직이 아니라 평행하게 잡는 것. ON의 방향은 법선 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$이지 $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$가 아니다.
- $a^2 - b^2$을 a^2e^2으로 바꾸는 것을 잊어, λ에 대한 식이 간단해지지 않는 것.
- 아무 언급 없이 $\sin\theta$로 나누는 것. $\sin\theta = 0$인 경우에는 실제로 성립하지 않는다.

STEP 너머

결과 $SP = a(1 + e\cos\theta) = a + ex_P$는 초점–준선 성질이 모습을 바꾼 것이다. 즉 초점까지의 거리는 준선(directrix) $x = -a/e$까지의 거리의 e배이다. 원뿔곡선(conic)을 초점을 중심으로 한 극좌표(polar coordinates)로 $r = \ell/(1 + e\cos\phi)$와 같이 나타내는 것이 대학 1학년 역학에서 케플러(Kepler) 궤도를 기술하는 방법이며, 여기서도 같은 분모 $1 + e\cos\theta$가 나타났다. 원뿔곡선의 기하와 STEP 스타일의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를, 궤도에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.