풀이

STEP III 2008, 문제 2

순수수학 • 거듭제곱의 합

> **STEP III 2008, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q2

핵심 아이디어

$(r+1)^k - r^k$의 합은 망원급수(telescoping sum)가 되므로 항 하나만 남는다. 한편 이항정리(binomial theorem)로 각 괄호를 전개할 수도 있으며, 그러면 같은 합이 더 낮은 차수의 거듭제곱 합 $S_j(n)$들의 결합으로 바뀐다. 두 결과를 같다고 놓으면 각 S_{k-1}을 그보다 앞선 합들로부터 만들어 내는 점화식(recurrence)을 얻는다. 그리고 이 점화식이 바로 소문항 (ii)에서 다항식 구조를 파악하는 데 필요한 도구이다.

풀이

소문항 (i)

먼저 망원급수를 살펴본다. 합을 풀어 쓰면

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^k - r^k\right] = (1^k - 0^k) + (2^k - 1^k) + \cdots + ((n+1)^k - n^k) = (n+1)^k,$$

이다. 중간의 모든 항이 소거되고, $k \geq 1$이므로 $0^k = 0$이기 때문이다.

다음으로 이항정리를 쓴다. 각 r에 대하여

$$(r+1)^k - r^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}r^j = 1 + \binom{k}{1}r + \binom{k}{2}r^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}r^{k-1},$$

이다. r^k 항이 소거되기 때문이다. 이를 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 더하면, 상수 1은 $n+1$을 기여하고(r의 값이 $n+1$개이므로), $j \geq 1$인 각 r^j는 $S_j(n)$을 기여한다. 따라서

$$(n+1)^k = (n+1) + \binom{k}{1}S_1(n) + \binom{k}{2}S_2(n) + \cdots + \binom{k}{k-2}S_{k-2}(n) + \binom{k}{k-1}S_{k-1}(n).$$

마지막 계수는 $\binom{k}{k-1} = k$이다. 나머지 계수에는 대칭성 $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$를 이용하면 $S_{k-j}(n)$의 계수는 $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$이다. 특히 $S_1(n)$의 계수는 $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1}$이다. $kS_{k-1}(n)$만 한쪽에 남기고 나머지를 모두 반대쪽으로 옮기면

$$kS_{k-1}(n) = (n+1)^k - (n+1) - \binom{k}{2}S_{k-2}(n) - \binom{k}{3}S_{k-3}(n) - \cdots - \binom{k}{k-1}S_1(n),$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(*)$이다. (여기서 S_{k-1}이 우리가 다루는 합 가운데 하나가 되려면 $k \geq 2$여야 한다.)

? **생각해 보기** $j = 0$ 항을 $S_0(n)$으로 쓰지 않고 따로 다룬 이유는 무엇인가?

S_k는 양의 k에 대해서만 정의되어 있고, $r = 0$일 때의 "0^0"은 뜻이 모호하다. 상수를 따로 빼내어 $n+1$로 직접 세면 두 문제를 모두 피할 수 있으며, $(*)$에 $-(n+1)$이 홀로 나타나는 이유도 이것으로 설명된다.

$S_3(n)$. $(*)$에서 $k = 4$로 두면 $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$이므로

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2(n) - 4S_1(n) \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1). \end{aligned}$$

모든 항이 인수 $n+1$을 가지므로

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n^2 - n - 2n\right] \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

따라서

$$S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \big(S_1(n)\big)^2.$$

$S_4(n)$. $k = 5$로 두면 $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$이므로

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - (n+1) - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n).$$

이번에도 S_3, S_2, S_1에 대한 식을 이용하여 인수 $n+1$을 묶어 낸다.

$$\begin{aligned} 5S_4(n) &= (n+1)\left[(n+1)^4 - 1 - \tfrac{5}{2}n^2(n+1) - \tfrac{5}{3}n(2n+1) - \tfrac{5}{2}n\right] \\ &= (n+1)\Big[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \tfrac{5}{2}n^3 - \tfrac{5}{2}n^2 \\ &\qquad - \tfrac{10}{3}n^2 - \tfrac{5}{3}n - \tfrac{5}{2}n\Big] \\ &= (n+1)\left[n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{1}{6}n^2 - \tfrac{1}{6}n\right] \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right). \end{aligned}$$

S_4도 S_2처럼 인수 $2n+1$을 가질 것으로 기대되므로, 삼차식에 $n = -\frac{1}{2}$를 대입해 본다. $-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$이다. 그러므로 $2n+1$은 인수이고, $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2+3n-1)$이다. 따라서

$$S_4(n) = \tfrac{1}{30}\, n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

소문항 (ii)

k에 대한 강한 수학적 귀납법(strong induction)을 사용한다. $S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$의 차수가 2이므로 $k = 1$일 때 명제가 성립한다($k = 2$일 때도 성립한다).

어떤 $k \geq 2$에 대하여 $S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$이 각각 n에 대한 다항식이고 S_j의 차수가 $j+1$이라고 가정하자. $(*)$에서 k 대신 $k+1$을 대입하면

$$(k+1)\, S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) - \cdots - \binom{k+1}{k} S_1(n).$$

우변을 살펴보면 다음과 같다.

- $(n+1)^{k+1}$은 최고차항의 계수가 1인 $k+1$차 다항식이다.
- $n+1$의 차수는 1이다.
- $1 \leq j \leq k-1$인 각 $S_j(n)$은 가정에 의하여 차수가 $j+1 \leq k$인 다항식이다.

따라서 우변은 다항식이고, 그 n^{k+1} 항은 오직 $(n+1)^{k+1}$에서만 나오므로 소거될 수 없다. $k+1 \neq 0$으로 나누면 $S_k(n)$은 차수가 정확히 $k+1$인 다항식이다(최고차항의 계수는 $\frac{1}{k+1}$이다). 이로써 귀납법이 완성된다.

> **생각해 보기** 다항식 $P(n)$의 "상수항"과 "계수의 합"은 각각 무엇에 해당하는가?

각각 $P(0)$과 $P(1)$이다. $S_k(n) = P(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \cdots + a_1 n + a_0$이라 쓰자. 이 식은 $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대하여 합 $\sum_{r=0}^{n} r^k$와 일치하므로, $n = 0$과 $n = 1$을 대입할 수 있다.

- 상수항: $k \geq 1$이므로 $a_0 = P(0) = S_k(0) = 0^k = 0$이다.
- 계수의 합: $a_{k+1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1) = S_k(1) = 0^k + 1^k = 1$이다.

두 결과가 모두 증명되었다.

검산

- 작은 값: $S_3(3) = 1 + 8 + 27 = 36 = \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot 16$이고, $S_4(3) = 1 + 16 + 81 = 98 = \frac{1}{30} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 35$이다.

- 구한 답에 소문항 (ii)를 적용해 보면: $S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$의 상수항은 0이고 계수의 합은 $\frac{6+15+10-1}{30} = 1$이다. 또한 최고차항의 계수는 귀납법이 예측한 대로 $\frac{1}{5} = \frac{1}{k+1}$이다.
- $2 \le k \le 9, 0 \le n \le 30$에 대하여 $(*)$를, $0 \le n < 200$에 대하여 두 닫힌 형태의 식을 직접 더하여 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- $\sum 1$에서 $r = 0$ 항을 빠뜨리는 실수: 이 합은 n이 아니라 $n+1$이다.
- 공통인수 $n+1$을 먼저 묶어 내지 않고 모두 전개하는 것. 그러면 S_4를 구하는 계산이 훨씬 번거로워진다.
- 소문항 (ii)에서 차수가 "$k+1$ 이하"라고만 말하는 것. 문제는 차수가 정확히 $k+1$임을 요구하므로, n^{k+1} 항이 소거될 수 없음을 짚어야 한다.

STEP 너머

이 다항식들의 계수는 베르누이 수(Bernoulli numbers)가 결정하며, 파울하버의 공식(Faulhaber's formula)은 $S_k(n)$을 n의 거듭제곱들의 결합으로 나타내는데, 그 계수는 이항계수와 베르누이 수의 곱이다. $S_k(n)$이 최고차항이 $\frac{n^{k+1}}{k+1}$인 $k+1$차 다항식이라는 사실은 $\int_0^x t^k \, \mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$의 이산적 유사물이며, 이 생각은 유한차분법(calculus of finite differences)에서 엄밀하게 다루어진다. 이와 같은 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.