풀이

STEP III 2008, 문제 11

역학 • 회전 역학

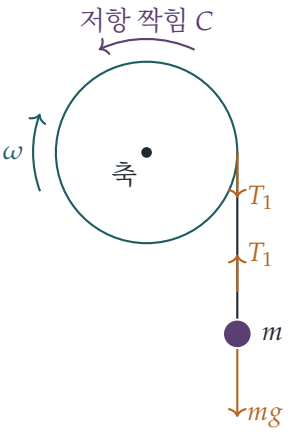
> **STEP III 2008, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q11

핵심 아이디어

짝힘(couple)이 일정하다는 것은 각감속도(angular deceleration)가 일정하다는 뜻이다. 따라서 실이 떨어져 나간 뒤에는 바퀴가 "suvat" 공식의 회전 버전을 따르고, 첫 번째 결과는 그저 "거리 = 평균 속력 × 시간"일 뿐이다. 같은 단계에서 저항 짝힘의 크기를 I로 나타낼 수도 있다. 내려가는 단계에서는 에너지 방정식이 자연스러운 도구이다. 모든 것이 얼마나 움직이는지 알고 있고, 일정한 짝힘에 맞서 한 일은 단순히 짝힘 × 각이기 때문이다.

풀이

모형. 바퀴는 고정된 매끄러운 축을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)이다. 다만 크기가 C로 일정한 저항 짝힘이 운동 내내(입자가 내려가는 동안에도, 그 이후에도) 작용한다. 실은 가볍고 늘어나지 않으며 미끄러지지 않으므로, 실이 붙어 있는 동안 입자의 속력은 $v = r\omega$이다. 여기서 ω는 바퀴의 각속력(angular speed)이다.



실은 바퀴의 오른쪽에서 풀려 나오므로, 입자가 떨어질 때 바퀴는 시계 방향으로 돌고, 짝힘 C는 반시계 방향으로 작용하여 운동을 방해한다. (에너지를 이용하므로 실의 장력(tension) T_1은 실제로 필요하지 않다.)

실이 떨어져 나간 뒤

이제 바퀴에 작용하는 짝힘은 C뿐이므로, 축에 대한 모멘트를 취하면

$$I\dot{\omega} = -C,$$

이고 각감속도 C/I는 일정하다. 따라서 각속력은 시간 T 동안 ω_0에서 0으로 **일차적으로** 줄어들고,

$$\omega_0 = \frac{C}{I}\,T, \qquad \text{즉,} \qquad C = \frac{I\omega_0}{T}. \tag{1}$$

각속력이 일차적으로 줄어들 때 평균 각속력은 $\frac{1}{2}(\omega_0 + 0)$이고, 회전한 각은 평균 각속력에 시간을 곱한 것이다. 그 각은 n_2회전, 즉 $2\pi n_2$라디안이므로

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 T = 2\pi n_2,$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. (이는 $s = \frac{1}{2}(u+v)t$의 회전 버전이다.) 이로부터 다음도 얻는다.

$$\omega_0 = \frac{4\pi n_2}{T}, \qquad \text{따라서 (1)에 의해} \qquad C = \frac{4\pi n_2 I}{T^2}. \tag{2}$$

입자가 내려가는 동안

바퀴가 n_1회전, 즉 $2\pi n_1$라디안 도는 동안 실은 길이 $2\pi n_1 r$만큼 풀리므로, 입자는 거리 $2\pi n_1 r$만큼 떨어진다. 실이 떨어져 나가는 순간 바퀴의 각속력은 ω_0이고, 실이 미끄러지지 않았으므로 입자의 속력은 $r\omega_0$이다.

? 생각해 보기 저항이 있는데도 왜 여기서 에너지를 쓸 수 있을까?

에너지는 보존되지 않지만, 일-에너지 원리(work–energy principle)는 여전히 성립한다. 즉 위치 에너지의 감소량은 운동 에너지의 증가량과 저항에 맞서 한 일의 합과 같다. 각 θ만큼 회전하는 동안 일정한 짝힘 C에 맞서 한 일은 $C\theta$이며, 이는 일정한 힘에 맞서 한 일이 힘 $\times$ 거리인 것과 마찬가지이다. 실은 가볍고 늘어나지 않으며 미끄러지지 않으므로, 장력이 계 전체에 하는 알짜 일은 없다. 장력이 바퀴에 하는 일은 정확히 입자로부터 빼앗는 일과 같기 때문이다.

따라서 놓는 순간부터 실이 떨어져 나가는 순간까지

$$mg\,(2\pi n_1 r) = \tfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + C\,(2\pi n_1).$$

이제 (2)의 ω_0와 C를 대입하면

$$2\pi mgrn_1 = \tfrac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\frac{16\pi^2 n_2^2}{T^2} + 2\pi n_1 \cdot \frac{4\pi n_2 I}{T^2}.$$

양변에 $T^2/(2\pi)$를 곱하면

$$\begin{aligned} mgrn_1T^2 &= 4\pi n_2^2\left(mr^2 + I\right) + 4\pi n_1 n_2 I \\ &= 4\pi mr^2 n_2^2 + 4\pi n_2(n_1 + n_2)\,I. \end{aligned}$$

식을 정리하고 양수인 $4\pi n_2(n_1+n_2)$로 나누면

$$I = \frac{mgrn_1T^2 - 4\pi mr^2 n_2^2}{4\pi n_2(n_1+n_2)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- **차원**(*dimensions*). 분자의 두 항 $mgrT^2$과 mr^2은 모두 관성 모멘트(moment of inertia)의 단위($\mathrm{kg\,m^2}$)를 가지며, n_1, n_2는 순수한 수이다.
- **수치 검산**. $I = 0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $r = 0.2\,\mathrm{m}$, $C = 0.5\,\mathrm{N\,m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $n_1 = 5$로 두고 운동을 단계별로 계산하였다. 그러면 $\omega_0 \approx 13.03\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $T \approx 13.03\,\mathrm{s}$, $n_2 \approx 13.52$를 얻는다. 이때 $\frac{1}{2}\omega_0 T \approx 84.94 \approx 2\pi n_2$이고, 공식은 $I = 0.5000$을 돌려준다.
- **저항이 없는 경우**. $C \to 0$이면 바퀴는 결코 멈추지 않으므로 T와 n_2가 모두 무한대가 된다. 이때 공식의 분자는 T^2처럼, 분모는 $n_2^2 \propto T^2$처럼 커지므로 공식은 합리적으로 행동한다.

흔한 실수

- 내려가는 동안 저항에 맞서 한 일을 빠뜨리는 것. 문제에서 짝힘이 일정하다고 했고, 이 짝힘은 실이 떨어져 나간 뒤만이 아니라 내내 작용한다. 이를 빠뜨리면 공식이 틀리게 나온다. 위의 예에서는 0.5 대신 $I \approx 0.39$를 얻게 된다.
- 입자의 운동 에너지 $\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$을 잊는 것. $-4\pi mr^2 n_2^2$ 항은 바로 여기서 나온다.
- 회전수와 라디안을 혼동하는 것. n회전은 $2\pi n$라디안이다.

STEP 너머

이것은 깔끔한 실험 방법이다. 바퀴가 멈출 때까지의 시간을 재고 회전수를 세면, 관성 모멘트와 베어링의 마찰을 둘 다 미리 알지 못하더라도 바퀴의 관성 모멘트 와 베어링의 마찰을 동시에 측정할 수 있다. 대학 역학에서는 이를 강체 회전의 완전한 이론으로 발전시키는데, 거기서는 각운동량(angular momentum)과 토크(torque)가 운동량과 힘의 역할을 하고, 임의의 축을 중심으로 회전하는 물체에 대해서는 관성 모멘트가 텐서(tensor)가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 내용을 꼼꼼하게 전개하며, 바로 이런 성격의 문제를 많이 담고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.