풀이

STEP III 2008, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP III 2008, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q10

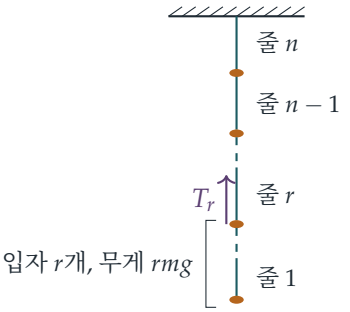
핵심 아이디어

각각의 짧은 줄은 그 아래에 매달린 모든 것을 떠받치므로 그 장력(tension)은 쉽게 적을 수 있다. 그러면 훅의 법칙(Hooke's law)으로 늘어난 길이(extension)와 저장된 에너지를 구할 수 있고, 그 합은 r과 r^2의 잘 알려진 합이 된다. 밧줄은 질량이 퍼져 있다는 점만 다를 뿐 같은 그림이다. 밧줄을 n개의 같은 조각으로 자르고, 각 조각의 질량을 그 아래쪽 끝에 있는 입자로 취급한 다음 $n \to \infty$로 보낸다. 그러면 합이 적분이 되고, 길이에 나타나는 인수 $\frac{1}{2}$는 밧줄의 한 조각이 평균적으로 밧줄 무게의 절반을 떠받치기 때문에 생긴다.

풀이

입자들이 달린 줄

짧은 줄들은 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄로, 질량들은 입자로 모형화한다. 문제에서처럼 줄에 아래에서부터 번호를 붙이면, 줄 r 아래에는 입자 r개가 있다. 곧 자기 자신의 입자와 줄 $1, \ldots, r-1$의 입자들이다.



계 전체는 정지해 있다. 줄 r의 위쪽 끝보다 아래에 있는 모든 것, 곧 줄 r, 줄 $1,\dots,r-1$, 그리고 그 위의 입자 r개를 생각하자. 여기에 작용하는 외력은 아래쪽으로 작용하는 무게 rmg와 위쪽으로 작용하는 줄 r의 장력 T_r뿐이다(줄은 가볍다). 따라서

$$T_r = rmg.$$

훅의 법칙에 따라 줄 r의 늘어난 길이는

$$x_r = \frac{T_r\,\ell}{\lambda} = \frac{rmg\ell}{\lambda}.$$

그러므로 긴 줄의 길이는

$$\sum_{r=1}^{n}(\ell + x_r) = n\ell + \frac{mg\ell}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} r = n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda}.$$

자연 길이(natural length)가 ℓ이고 x만큼 늘어난 줄에 저장된 탄성 에너지(elastic energy)는 $\lambda x^2/(2\ell)$이다. 줄 r의 경우 이는

$$\frac{\lambda}{2\ell}\Big(\frac{rmg\ell}{\lambda}\Big)^2 = \frac{r^2m^2g^2\ell}{2\lambda},$$

이고, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$을 이용하면 전체 탄성 에너지는

$$\frac{m^2g^2\ell}{2\lambda}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)\,m^2g^2\ell}{12\lambda}.$$

무거운 밧줄

생각해 보기 질량이 연속적으로 퍼져 있는 밧줄에 앞 부분이 어떻게 도움이 되는가?

밧줄을 n개의 같은 조각으로 자른다. 각 조각의 자연 길이는 $\ell = L_0/n$, 질량은 $m = M/n$이고, 각 조각의 탄성 계수(modulus)는 밧줄과 같은 λ이다(탄성 계수는 조각의 길이에 의존하지 않는다). 각 조각의 질량을 그 아래쪽 끝에 모으면 정확히 위의 긴 줄이 된다. $n\to\infty$이면 조각이 짧아지고, 질량을 모은 모형은 실제 밧줄에 가까워진다.

길이에 대입하면

$$n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda} = L_0 + \frac{n(n+1)}{2\lambda}\cdot\frac{Mg}{n}\cdot\frac{L_0}{n} = L_0 + \frac{MgL_0}{2\lambda}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \longrightarrow L_0\Big(1+\frac{Mg}{2\lambda}\Big)$$

이다($n\to\infty$일 때). 따라서

$$L = L_0\Big(1+\frac{Mg}{2\lambda}\Big),$$

로 요구된 결과를 얻는다.

이것을 직접 구할 수도 있다. 어떤 점 아래에 있는 밧줄의 자연 길이를 s라 하면, 그 점은 무게 Mgs/L_0을 떠받친다. 그곳에 있는 자연 길이 δs인 작은 요소의 장력은 $T = Mgs/L_0$이므로, 그 요소는 $T\,\delta s/\lambda$만큼 늘어난다. 이를 모두 더하면

$$L - L_0 = \int_0^{L_0} \frac{Mgs}{\lambda L_0}\,\mathrm{d}s = \frac{MgL_0}{2\lambda}.$$

에너지도 같은 방식으로 대입하면

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12\lambda}\cdot\frac{M^2g^2}{n^2}\cdot\frac{L_0}{n} = \frac{M^2g^2L_0}{12\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}.$$

(직접 구하면: 요소에 저장되는 에너지는 $T^2\,\delta s/(2\lambda)$이고, $\int_0^{L_0}\frac{M^2g^2s^2}{2\lambda L_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}$이다.)

이것을 L, L_0, λ로 나타내기 위해 길이 식을 이용하여 Mg를 소거한다.

$$L - L_0 = \frac{MgL_0}{2\lambda} \quad\Longrightarrow\quad Mg = \frac{2\lambda(L-L_0)}{L_0}.$$

따라서 밧줄에 저장된 탄성 에너지는

$$\frac{L_0}{6\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2(L-L_0)^2}{L_0^2} = \frac{2\lambda(L-L_0)^2}{3L_0}.$$

검산

- $n = 1$이면 앞 부분에서 길이는 $\ell + mg\ell/\lambda$, 에너지는 $m^2g^2\ell/(2\lambda)$이다. 입자 하나를 매단 줄 하나이므로 당연히 그래야 한다.
- 전체 늘어난 길이가 같은 $e = L - L_0$이지만 **균일한** 장력을 받는 밧줄과 비교해 보자. 그 밧줄에 저장되는 에너지는 $\lambda e^2/(2L_0)$이다. 우리의 답은 이것의 $\frac{4}{3}$배인데, 늘어남이 위쪽 근처에 몰려 있고 에너지는 국소 변형률(strain)의 제곱에 비례하여 커지므로 타당하다.
- 수치적으로 $M = 3$, $L_0 = 2$, $\lambda = 50$, $g = 9.8$일 때, 공식으로는 $L = 2.588$, 에너지 5.7624를 얻는다. $n = 100\,000$인 이산 사슬로는 2.58801과 5.76249를 얻고, $2\lambda(L-L_0)^2/(3L_0) = 5.7624$이다.

흔한 실수

- 줄 r의 장력을 $(n-r+1)mg$로 잡는 것. 번호 매기는 방식에 따라 줄 n이 맨 위에 있으므로, 줄 r은 입자 r개를 떠받친다.
- 밧줄의 각 조각에 탄성 계수 λ/n을 주는 것. 탄성 계수는 길이가 아니라 재료와 단면의 성질이다. 바뀌는 것은 강성(stiffness) λ/ℓ이다.
- 에너지를 L, L_0, λ로 나타내라고 했는데 M과 g로 나타낸 채로 두는 것.

STEP 너머

질량을 모은 n개의 입자에서 연속적인 밧줄로 넘어가는 것은 연속체 역학(continuum mechanics)의 기본적인 방법이다. 장력은 함수 $T(s)$가 되고, 훅의 법칙은 국소 응력(stress)과 변형률 사이의 관계가 되며, 에너지는 에너지 밀도(energy density)의 적분이 된다. 같은 질량과 용수철의 사슬을 진동시키면, 그 극한에서 줄의 파동 방정식(wave equation)을 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어가 전개되는 과정을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.