풀이

STEP III 2008, 문제 1

순수수학 • 비선형 연립방정식

> **STEP III 2008, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q1

핵심 아이디어

$s_k = ax^k + by^k$라 두면, 주어진 방정식들은 s_0, s_1, s_2, s_3의 값을 알려 준다. $p = x + y$, $q = xy$라 할 때 x와 y는 $t^2 - pt + q = 0$의 두 근이므로, 거듭제곱 합(power sum)은 점화식(recurrence)을 만족한다. 각 s_k는 바로 앞 항에 p를 곱한 것에서 그 앞 항에 q를 곱한 것을 뺀 값이다. 힌트의 "$x + y$를 곱하라"가 만들어 내는 것이 바로 이것이다. 그러면 네 개의 비선형 방정식이 p와 q에 대한 두 개의 **일차** 방정식이 된다. 그다음에는 이차방정식으로 x와 y를 구하고, 처음 두 방정식으로 a와 b를 구한다.

풀이

$k = 0, 1, 2, 3$에 대하여 $s_k = ax^k + by^k$라 하면 $s_0 = 1, s_1 = \frac{1}{3}, s_2 = \frac{1}{5}, s_3 = \frac{1}{7}$이다. $p = x + y$, $q = xy$로 둔다.

거듭제곱 합의 점화식

임의의 a, b, x, y와 임의의 $k \geq 1$에 대하여

$$(x + y)(ax^k + by^k) = ax^{k+1} + by^{k+1} + xy\,(ax^{k-1} + by^{k-1}),$$

이다. 교차항이 $axyx^{k-1}$과 $bxy\,y^{k-1}$이기 때문이다. 우리의 기호로 쓰면

$$s_{k+1} = p\,s_k - q\,s_{k-1}.$$

이것은 항등식이므로 연립방정식의 **모든** 해에 대하여 성립한다.

$x+y$와 xy 구하기

$k=1, k=2$를 택하고 알려진 값을 대입하면

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3}p - q,$$
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{3}q.$$

첫째 식에서 $q = \frac{1}{3}p - \frac{1}{5}$이다. 이를 둘째 식에 대입하면

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{9}p + \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{45}p = \frac{1}{7} - \frac{1}{15} = \frac{8}{105} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{6}{7},$$

이고, 따라서 $q = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$이다. 이 일차 연립방정식의 행렬식(determinant)은 0이 아니므로 이 값들은 반드시 이렇게 정해진다. 즉 **모든** 해에서 $x+y = \frac{6}{7}$, $xy = \frac{3}{35}$이다.

x와 y 구하기

따라서 x와 y는

$$t^2 - \frac{6}{7}t + \frac{3}{35} = 0, \qquad \text{즉,} \qquad 35t^2 - 30t + 3 = 0,$$

의 두 근이고, 이를 풀면

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900-420}}{70} = \frac{30 \pm 4\sqrt{30}}{70} = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35}.$$

판별식(discriminant)이 양수이므로 $x \neq y$이고, $\{x, y\}$는 이 두 값을 어느 한 순서로 짝지은 것이다.

> **생각해 보기** x와 y를 알면 a와 b가 정해진다고 확신할 수 있는가?

그렇다. x와 y를 알고 나면 처음 두 방정식 $a+b=1$과 $ax+by=\frac{1}{3}$은 a와 b에 대한 일차방정식이고, 그 행렬식은 $y-x$이다. $x \neq y$이므로 이 값은 0이 아니며, 따라서 순서쌍 (a, b)는 정확히 하나 존재한다.

a와 b 구하기

$x = \frac{15+2\sqrt{30}}{35}, y = \frac{15-2\sqrt{30}}{35}$로 택하면 $x-y = \frac{4\sqrt{30}}{35}$이다. $a+b=1$과 $ax+by=\frac{1}{3}$에서 b를 소거하면 $a(x-y) = \frac{1}{3} - y$이다. 이제

$$\frac{1}{3} - y = \frac{35 - 3(15-2\sqrt{30})}{105} = \frac{6\sqrt{30}-10}{105},$$

이므로

$$a = \frac{6\sqrt{30}-10}{105} \cdot \frac{35}{4\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}-10}{12\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36},$$

이고 $b = 1 - a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$이다.

이들이 실제로 해임을 확인하기

지금까지는 어떤 해든 이런 꼴이어야 한다는 것만 보였으므로, 이것이 실제로 성립하는지 확인해야 한다. 만든 방법에 의해 $s_0 = 1, s_1 = \frac{1}{3}$이다. p와 q가 위의 두 일차방정식을 만족하므로, 점화식에 의해 $s_2 = ps_1 - qs_0 = \frac{1}{5}$이고, 이어서 $s_3 = ps_2 - qs_1 = \frac{1}{7}$이다. 따라서 네 방정식이 모두 성립한다.

x와 y의 역할을 바꾸면 a와 b도 서로 바뀐다. 따라서 해는 정확히 두 개이다.

$$(a, b, x, y) = \left(\frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35} \right)$$

그리고 여기서 $a \leftrightarrow b$와 $x \leftrightarrow y$를 동시에 바꾼 것이다. 두 해 모두에서 x, y 중 큰 값은 작은 계수와 짝을 이룬다.

검산

수치로 보면 $x \approx 0.741556$, $y \approx 0.115587$, $a \approx 0.347855$, $b \approx 0.652145$이다. 그러면 $ax + by \approx 0.333333$, $ax^2 + by^2 \approx 0.200000$, $ax^3 + by^3 \approx 0.142857$이고, 이는 기계 정밀도(machine precision) 안에서 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$과 일치한다. 간단한 타당성 점검도 해 보자. x와 y는 모두 $(0, 1)$에 있고, a와 b는 모두 양수이다. 이는 우변이 $[0, 1]$에서 t^{2k}의 평균값이라는 사실(아래 참고)과 잘 맞는다.

흔한 실수

- x와 y를 구하고 나서 짝짓기가 중요하다는 것을 잊는 것. a는 x와 짝을 이루므로, a와 b를 함께 바꾸지 않고 x와 y만 바꿀 수는 없다.
- 필요조건(necessary condition)을 찾고 나서 멈추는 것. 문제가 "모두 구하라"고 하므로, 모든 해가 이 꼴이라는 것과 이 값들이 실제로 네 방정식을 모두 만족한다는 것을 둘 다 보여야 한다.

STEP 너머

수 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$은 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{2k}\,\mathrm{d}t$이다. 따라서 이 연립방정식은 7차 이하의 다항식에 대하여 정확한 규칙 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \approx \frac{a}{2}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big) + \frac{b}{2}\big(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\big)$를 찾으라는 문제이다. 이것이 바로 4점 **가우스–르장드르 구적법**(Gauss–Legendre quadrature)이다. 그 절점은 $\pm\sqrt{x}$와 $\pm\sqrt{y}$이고, $a \approx 0.3479$와 $b \approx 0.6521$은 잘 알려진 그 가중치이다. 여기서 한 것처럼 거듭제곱 합에서 점화식을 찾아내는 것은 신호 처리에서 쓰이는 프로니 방법(Prony's method)의 바탕이 되는 아이디어이기도 하다. 더 알고 싶다면 Süli and Mayers, *An Introduction to*

Numerical Analysis(수치해석 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.