풀이

STEP II 2008, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP II 2008, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

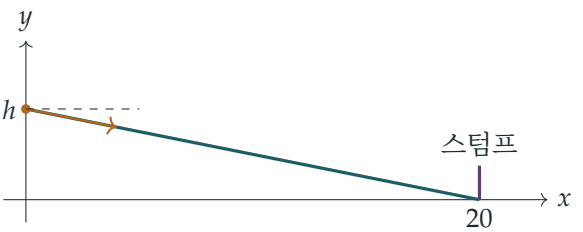
step.maths.org/questions/08-s2-q9

핵심 아이디어

수평 운동으로부터 비행 시간(time of flight)이 α에 대한 식으로 정해지고, 그 시간을 수직 운동에 대입하면 α와 h를 잇는 방정식 하나를 얻는다. $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$로 바꿔 쓰면 이 방정식은 $\tan\alpha$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되는데, 이것이 "어떤 각도로 던져야 목표에 맞는가?" 유형의 문제에서 쓰는 표준적인 기법이다. 그다음에는 크리켓에 대한 상식으로 알맞은 근(root)을 고르고, 작은 각 근사(small-angle approximation)로 마무리한다.

풀이

공을 공기 저항(air resistance)과 회전 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 원점을 발사점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 스텀프(stumps) 쪽을 향하는 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다. 그러면 공은 $(0, h)$에서 속력 $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 수평선 위쪽 α의 각도로 출발한다(α가 음수이면 아래쪽을 향해 던진 것이다).



소문항 (i)

수평 방향으로는 힘이 작용하지 않으므로 $x = 40t\cos\alpha$이다. 공이 $x = 20$에 도달하는 시각은

$$t = \frac{20}{40\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

이다. 수직 방향의 가속도는 $-10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이므로

$$y = h + 40t\sin\alpha - 5t^2.$$

이다. 이 시각에 공은 지면, 즉 $y = 0$에 있으므로

$$0 = h + 40\sin\alpha\cdot\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{5}{4\cos^2\alpha} = h + 20\tan\alpha - \tfrac{5}{4}\sec^2\alpha.$$

이다. 이제 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하고 $T = \tan\alpha$로 놓으면

$$h + 20T - \tfrac{5}{4}(1 + T^2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5T^2 - 80T + 5 - 4h = 0.$$

이다. 근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$T = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 20(5-4h)}}{10} = \frac{80 \pm \sqrt{6300 + 80h}}{10},$$

이므로 가능한 두 값은

$$\tan\alpha = 8 \pm \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h}.$$

이다. $h \geq 0$이므로 두 값 모두 실수이다.

생각해 보기 속구 투수(fast bowler)라면 실제로 어느 근을 쓰겠는가?

$\sqrt{63} \approx 7.9$이므로 큰 근은 $\tan\alpha \approx 16$, 즉 $\alpha \approx 86°$를 준다. 이것은 약 80 m 높이까지 치솟았다가 약 8 s 뒤에야 스텀프 위로 떨어지는 높은 로브이다. 이는 결코 속구 투수의 투구가 아니다. 따라서 작은 근

$$\tan\alpha = 8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h},$$

이 알맞은 근이다. 현실적인 투구 높이(2미터 남짓)에서는 $63 + \frac{4}{5}h$가 64에 가까우므로 $\tan\alpha$는 0에 가깝다. 예를 들어 0과 3 사이의 어떤 h에 대해서도 $|\tan\alpha| < 0.09$이다. 그러므로 α는 작은 각이고 $\cos\alpha \approx 1$이며, 스텀프에 도달하는 시간은

$$t = \frac{1}{2\cos\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\,\mathrm{s},$$

로 요구된 결과와 같다. (실제로 $t = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$이고, 이 값은 $|\tan\alpha| < 0.1$이면 언제나 $\frac{1}{2}$와 0.5% 이내로 차이 난다.)

소문항 (ii)

공이 수평선 아래쪽으로 던져지는 것은 정확히 $\tan\alpha < 0$일 때이다. 큰 근은 항상 양수이므로 작은 근을 쓴다.

$$8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} < 0 \iff \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} > 8 \iff 63 + \tfrac{4}{5}h > 64 \iff h > \tfrac{5}{4},$$

여기서 양변이 모두 양수이므로 제곱하는 과정은 거꾸로도 성립한다. 따라서 $h > 1.25$일 때 투수는 공을 수평선 아래쪽으로 던진다. 정확히 $h = 1.25$이면 공은 수평으로 던져진다.

소문항 (iii)

$h = 2.5$일 때 소문항 (ii)로부터 α는 작은 음수임을 안다. $\cos\alpha \approx 1$이고 $\sin\alpha \approx \alpha$(라디안(radian) 단위)이므로 $\tan\alpha \approx \alpha$이고 $\sec^2\alpha \approx 1$이다. 따라서 소문항 (i)의 방정식 $0 = h + 20\tan\alpha - \frac{5}{4}\sec^2\alpha$는

$$0 \approx 2.5 + 20\alpha - 1.25, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha \approx -\frac{1.25}{20} = -0.0625 \text{ rad}.$$

가 된다. 도로 환산하면

$$\alpha \approx -0.0625 \times \frac{180}{\pi} \approx -3.58^\circ,$$

이므로 $\alpha \approx -3.6^\circ$이다. 공은 수평선 아래쪽으로 약 3.6°의 각도로 던져진다.

다른 방법으로 보면, 이항 근사(binomial approximation)를 이용하여 $\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = 8 - 8\sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx 8 - 8(1 + \frac{1}{128}) = -\frac{1}{16}$이다. 이것도 같은 답을 준다.

검산

- **정확한 값.** $\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = -0.06226$이므로 $\alpha = -3.563^\circ$이고, 이는 유효숫자(significant figures) 두 자리로 -3.6°로서 근삿값과 일치한다.
- **시뮬레이션.** $(0, 2.5)$에서 $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, -3.563°로 출발하는 운동을 수치적으로 단계별 계산하면, 공은 $0.501\,\mathrm{s}$ 뒤에 높이 $0.0000\,\mathrm{m}$에서 $x = 20$에 도달한다.
- **경계.** $h = 1.25$에서 작은 근은 $8 - \sqrt{64} = 0$이다. 공은 수평으로 던져지고, 0.5초 동안 날아가며 $5(0.5)^2 = 1.25\,\mathrm{m}$ 떨어져 정확히 스텀프에 닿는다.

흔한 실수

- $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 떠올리지 못하고 $\sin\alpha$와 $\cos\alpha$로 따로 풀려고 하여 계산이 복잡해진다.

- 각을 라디안으로 답하거나, 작은 각 근사를 도 단위로 사용한다. $\sin\theta \approx \theta$는 θ가 라디안일 때만 성립한다.
- 소문항 (iii)에서 음의 부호를 빠뜨린다. 소문항 (ii)에서 예측한 대로 각은 수평선 아래쪽이다.

STEP 너머

근이 두 개인 구조는 일반적인 사실을 반영한다. 일정한 속력으로 던진 포물체는 자신의 "포락선(envelope)"(안전 포물선(parabola of safety)) 안쪽의 어떤 점에든 두 가지 궤적으로 도달할 수 있다. 포락선 위에서는 두 궤적이 하나로 합쳐지고, 포락선 바깥의 점에는 전혀 도달할 수 없다. 실제 크리켓 공은 항력(drag)과 회전에 의한 마그누스 효과(Magnus effect)의 영향도 받으며, 이로부터 대개 수치적으로 풀어야 하는 비선형 미분방정식(nonlinear differential equation)이 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 포물체 운동과 저항을 받는 운동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.