풀이

STEP II 2008, 문제 8

순수수학 • 벡터와 각의 이등분선

STEP II 2008, 8번 문제

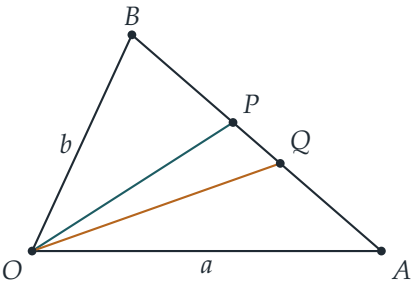
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q8

핵심 아이디어

$\angle AOB$의 이등분선(angle bisector) 방향의 벡터는 OA와 OB 방향의 **단위벡터**(unit vector)의 합이다. 길이가 같은 두 벡터를 더하면 마름모(rhombus)의 대각선이 되고, 마름모의 대각선은 그 각을 이등분하기 때문이다. 이것을 P의 위치벡터(position vector)와 맞추어 보면 λ가 정해진다. 그다음 Q는 P에서 A와 B의 역할을 바꾼 것일 뿐이고, 마지막 항등식은 스칼라곱(scalar product)을 이용한 직접 계산으로 얻어지며, 이때 다루기 까다로운 항 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$가 소거된다.

풀이



그림에서는 $a > b$이므로 (청록색으로 그린 이등분선 위의 점) P는 B에 더 가깝고, Q는 B로부터의 거리가 P에서 A까지의 거리와 같은 점이다.

P의 위치벡터

$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda$이고 두 부분을 더하면 AB이므로 $AP = (1-\lambda)AB$이다. 따라서 $\overrightarrow{AP} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$이고

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

(확인: 비가 말해 주는 대로 $\lambda = 1$이면 A, $\lambda = 0$이면 B가 된다.)

λ 구하기

벡터 $\mathbf{a}/a$와 $\mathbf{b}/b$는 OA와 OB 방향의 단위벡터이다. 이 둘의 합은 변이 OA와 OB 방향인 마름모의 대각선이므로, $\angle AOB$의 이등분선 방향을 가리킨다. P는 이 이등분선 위에 있으므로, 어떤 스칼라 k에 대하여

$$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = k\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

이다.

생각해 보기 왜 $\mathbf{a}$의 계수와 $\mathbf{b}$의 계수를 각각 따로 비교해도 되는가?

O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지도 않다. 따라서 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 일차독립(linearly independent)이다. 즉 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$이면 $\alpha = \beta = 0$이다. 그러므로

$$\lambda = \frac{k}{a}, \qquad 1-\lambda = \frac{k}{b}.$$

두 식을 더하면 $1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$이므로 $k = \dfrac{ab}{a+b}$이고

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{a+b}}, \qquad 1-\lambda = \frac{a}{a+b}.$$

이것은 모습을 바꾼 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)이다. 즉 $AP : PB = (1-\lambda) : \lambda = a : b = OA : OB$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\,\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

점 Q와 항등식

Q는 AB 위에 있고 $BQ = AP = (1-\lambda)AB$이므로, P의 경우와 같은 논리를 A 대신 B에서부터 재어 적용하면

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} + (1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \frac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

$c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$로 놓고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2$을 이용하면

$$(a+b)^2\,OQ^2 = (a\mathbf{a}+b\mathbf{b})\cdot(a\mathbf{a}+b\mathbf{b}) = a^2\cdot a^2 + 2ab\,c + b^2\cdot b^2 = a^4+b^4+2abc,$$
$$(a+b)^2\,OP^2 = (b\mathbf{a}+a\mathbf{b})\cdot(b\mathbf{a}+a\mathbf{b}) = b^2a^2 + 2ab\,c + a^2b^2 = 2a^2b^2+2abc.$$

두 식을 빼면 c가 들어 있는 항이 소거된다.

$$(a+b)^2\left(OQ^2-OP^2\right) = a^4-2a^2b^2+b^4 = (a^2-b^2)^2 = (a-b)^2(a+b)^2.$$

$(a+b)^2\neq 0$으로 나누면

$$OQ^2-OP^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2,$$

이므로 증명하려던 식이 성립한다.

검산

$\mathbf{a}=(3,0)$, $\mathbf{b}=(0,4)$로 잡으면 $a=3$, $b=4$이고 $\angle AOB$는 직각이다. 이때 $\lambda=\frac{4}{7}$이고 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$인데, 이 점은 직각의 이등분선인 $y=x$ 위에 있다. 또 $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$이므로 $OQ^2-OP^2=\frac{337}{49}-\frac{288}{49}=1=(4-3)^2$이다. $a=b$이면 삼각형은 이등변삼각형(isosceles triangle)이고, $P=Q$는 AB의 중점이며, 차는 마땅히 그래야 하듯 0이다. 2차원과 3차원에서 무작위로 만든 삼각형 20,000개에 대한 수치 실험에서도 모든 결과가 10^{-13} 이내에서 일치했다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$로 쓰는 것. 비에서 큰 몫인 $1-\lambda$는 A로부터의 거리이므로 $\mathbf{b}$에 붙는다. $\lambda=1$을 넣어 확인해 보자.
- $\mathbf{a}+\mathbf{b}$를 이등분선의 방향으로 쓰는 것. 이것은 $a=b$일 때만 맞으며, 단위벡터를 써야 한다.
- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$을 전개할 때 교차항(cross term) $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$를 빠뜨리고 a^2+b^2으로 쓰는 것. 여기서는 이 항이 소거되지만, 그것은 두 전개식 모두에 이 항이 있을 때에만 그렇다.

STEP 너머

마지막 계산은 선형사상(linear map)에 의해 길이가 어떻게 변환되는가를 보여 주는 특수한 경우이다. OP^2과 OQ^2은 이차형식(quadratic form) $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$의 값이고, 교차항은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 그람 행렬(Gram matrix)이 결정한다. 단위벡터를 더하면 이등분선이 된다는 사

실도 일반화된다. 임의의 내적 공간(inner-product space)에서 두 벡터 사이의 "한가운데" 방향은 각 벡터를 정규화한 다음 더해서 찾는다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점에서 스칼라곱, 길이, 각을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.