풀이

STEP II 2008, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP II 2008, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q7

핵심 아이디어

좌변 $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 $\ln y$의 도함수(derivative)이므로, 이 치환은 로그를 취해서 다루는 것이 가장 좋다. 곱 $y = u\,(1+x^2)^{1/2}$는 로그를 취하면 합이 되고, 우변의 항 $\frac{x}{1+x^2}$는 정확히 $\ln(1+x^2)^{1/2}$의 도함수이다. 이 항이 소거되어 u에 대한 변수분리형 방정식(separable equation)이 남는다. 소문항 (ii)는 세제곱근으로 같은 아이디어를 적용한 것이고, 두 답을 나란히 놓으면 (iii)의 규칙이 분명히 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$x = 0$에서 $y = 1 \neq 0$이고 방정식에 $1/y$가 들어 있으므로, $x = 0$을 포함하면서 $y \neq 0$인 구간에서 생각한다. $(1+x^2)^{1/2} > 0$이므로 치환하면 그 구간에서 $u \neq 0$이기도 하고, $u(0) = 1$이다.

$|y| = |u|\,(1+x^2)^{1/2}$의 양변에 로그를 취하고 미분하면

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

이것을 미분방정식(differential equation)과 비교하면 $\frac{x}{1+x^2}$ 항이 소거되어

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy = x\,u\,(1+x^2)^{1/2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x(1+x^2)^{1/2},$$

가 남는다. 여기서 u로 나누었는데, $u \neq 0$이므로 그렇게 해도 된다.

? **생각해 보기** $x(1+x^2)^{1/2}$를 번거롭지 않게 적분하려면 어떻게 해야 할까?

인수 x는 $1+x^2$의 도함수의 절반이므로, 연쇄법칙을 거꾸로 적용(reverse chain rule)하면 $\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$에 상수를 더한 것이다. (미분해서 확인해 보라.)

양변을 x에 대하여 적분하면

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

$x=0$에서 $u=1$이므로 $-1 = \frac{1}{3} + C$이고 $C = -\frac{4}{3}$이다. 따라서

$$\frac{1}{u} = \frac{4-(1+x^2)^{3/2}}{3}, \qquad u = \frac{3}{4-(1+x^2)^{3/2}},$$

이고, 그러므로

$$\boxed{y = \frac{3\,(1+x^2)^{1/2}}{4-(1+x^2)^{3/2}}}$$

이다. 이 식은 0을 포함하면서 분모가 양수인 구간, 즉 $(1+x^2)^{3/2} < 4$, 다시 말해 $|x| < \sqrt{2^{4/3}-1} \approx 1.233$에서 성립한다. $|x|$가 이 값에 가까워지면 $y \to \infty$이다.

소문항 (ii)

이번에는 추가된 항이 $\frac{x^2}{1+x^3}$이고, 이는 $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) = \ln(1+x^3)^{1/3}$의 도함수이다. 따라서 $x=0$ 근처($1+x^3>0$인 곳)에서 $y = u\,(1+x^3)^{1/3}$로 놓으면 된다. 앞에서와 똑같이

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2}{1+x^3},$$

이므로 방정식은

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 y = x^2 u\,(1+x^3)^{1/3}, \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2(1+x^3)^{1/3}.$$

이 된다. 이번에는 x^2이 $1+x^3$의 도함수의 3분의 1이므로

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}(1+x^3)^{4/3} + C = \tfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

$x=0$에서 $u=1$이므로 $-1 = \frac{1}{4} + C$이고 $C = -\frac{5}{4}$이다. 따라서 $\frac{1}{u} = \frac{5-(1+x^3)^{4/3}}{4}$이고

$$\boxed{y = \frac{4\,(1+x^3)^{1/3}}{5-(1+x^3)^{4/3}}}$$

이며, 이 식은 0 근처의 $-1 < x < \left(5^{3/4}-1\right)^{1/3} \approx 1.33$에서 성립한다.

소문항 (iii)

두 답을 비교하면, 분자에는 거듭제곱근 $(1+x^n)^{1/n}$이, 분모에는 거듭제곱 $(1+x^n)^{(n+1)/n}$이 나타나고, 상수는 $n+1$과 $n+2$이다. 따라서 다음과 같이 추측한다.

$$\boxed{y = \frac{(n+1)\,(1+x^n)^{1/n}}{n+2-(1+x^n)^{(n+1)/n}}}$$

이 식은 $n=2$와 $n=3$일 때 (i)과 (ii)의 답을 준다. (증명은 요구되지 않았지만, 같은 치환 $y = u(1+x^n)^{1/n}$으로 증명할 수 있다. $\int x^{n-1}(1+x^n)^{1/n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(1+x^n)^{(n+1)/n}$이고, $x=0$에서의 조건으로부터 상수 $-\frac{n+2}{n+1}$을 얻는다.)

검산

- $x=0$에서 각 식은 요구된 대로 $\frac{n+1}{n+2-1} = 1$을 준다.
- (i)에서 $x=0$ 근처를 보면, 방정식으로부터 $y'(0)=0$이고, 실제로 $(1+x^2)^{1/2}$와 $(1+x^2)^{3/2}$ 모두 0에서 기울기가 0이다.
- 방정식을 수치적으로 풀면($x=0$에서 시작하는 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 단계), $n=2,3,4,5,7$에 대하여 여러 점에서 공식과 10^{-8}보다 작은 오차로 일치한다. 예를 들어 (i)에서 $x=1$일 때 $y = \frac{3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \approx 3.6213$이고, (ii)에서 $x=1$일 때 $y = \frac{4\cdot 2^{1/3}}{5-2^{4/3}} \approx 2.0320$이다.

흔한 실수

- $y = u(1+x^2)^{1/2}$를 대입하고 곱의 미분법으로 곧바로 미분하는 것: 가능하기는 하지만 지저분하다. 양변을 y로 나누면(로그를 취하는 것과 같다) 소거가 분명히 보인다.
- $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -u^{-1}$에서 음의 부호를 빠뜨려 상수를 망치는 것.
- 상수를 잘못된 단계에서 정하는 것: 식을 정리하기 전에 $u(0)=1$을 적용해야 한다(u에 대한 방정식에 $y(0)=1$을 쓰면 안 된다).

STEP 너머

이 방정식은 **베르누이 방정식**(Bernoulli equation) $y' = P(x)y + Q(x)y^2$이며, 일반적인 기법은 치환 $v = 1/y$로 이를 선형 방정식으로 만드는 것이다. 여기서는 문제에 주어진 치환이 그 일을 두 단계로 해낸다. 적분인자(integrating factor)와 비슷한 $(1+x^n)^{1/n}$으로 P 항을 없앤 다음 변수를 분리하는 것이다. 또한 방정식이 무해해 보이는데도 해가 유한한 x에서 발산한다는 점에 주목하라. 이러한 "유한 시간 폭발(finite-time blow-up)"은 y^2 항이 있

는 방정식에서 전형적으로 나타나며, 상미분방정식(ODE) 첫 강좌에서 다룬다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 베르누이 방정식과 해의 존재성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.