풀이

STEP II 2008, 문제 6

순수수학 • 합을 곱으로 바꾸는 공식

> **STEP II 2008, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q6

핵심 아이디어

각이 서로 다른 코사인과 사인의 합은 다루기 불편하지만, 두 코사인의 합은 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)을 이용하여 곱으로 인수분해할 수 있다. 먼저 사인을 코사인으로 바꾸어 쓴다. 그러면 f의 영점(zero)은 두 간단한 인수의 영점이 되고, 두 인수가 **모두** 0이 되는 점이 곡선이 축에 접하는 점이다. 마지막 소문항에서는 코사인과 사인이 각각 1보다 클 수 없다는 사실을 기억하자.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$A = 2x + \frac{\pi}{3}, \qquad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos B, \quad \text{여기서} B = \frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2},$$

그러면 $f(x) = \cos A + \cos B$이다.

소문항 (i)

항 $\cos(2x + \frac{\pi}{3})$의 주기(period)는 π이고, $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4})$의 주기는 $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$이다. 공통 주기는 각 주기의 정수배여야 한다. $p\pi = q \cdot \frac{4\pi}{3}$은 $3p = 4q$를 뜻하고, 가장 작은 양의 해는 $p = 4, q = 3$이다. 따라서 모든 x에 대하여 $f(x + 4\pi) = f(x)$이고, f의 주기는

$$4\pi.$$

이다. 이보다 작은 주기는 없다. 소문항 (iii)에서 보겠지만 $f(x) = 2$인 것은 정수 t에 대하여 $x = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi$일 때뿐이므로, f가 최댓값(maximum)에 이르는 점들은 4π 간격으로 떨어져 있고, 따라서 어떤 주기든 4π의 배수여야 한다.

소문항 (ii)

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$를 이용하면,

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{12}\right) = \frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24},$$
$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24},$$

이므로 다음을 얻는다.

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right).$$

따라서 $f(x) = 0$인 것은 두 코사인 중 하나가 0일 때이고, 그때뿐이다.

첫째 인수. $\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$에서 $x = -\frac{\pi}{6} + 4k\pi$를 얻는다. 이 가운데 $[-\pi, \pi]$에 속하는 것은 $x = -\frac{\pi}{6}$뿐이다.

둘째 인수. $\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$에서 $\frac{7x}{4} = \frac{17\pi}{24} + k\pi$이므로

$$x = \frac{(17 + 24k)\pi}{42}.$$

$-42 \le 17 + 24k \le 42$이어야 하므로 $k = -2, -1, 0, 1$이고, 이로부터 $x = -\frac{31\pi}{42}$, $-\frac{7\pi}{42} = -\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{42}$, $\frac{41\pi}{42}$를 얻는다.

둘을 합치면 $-\pi \le x \le \pi$에서 f의 영점은

$$x = -\frac{31\pi}{42}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{42}, \quad \frac{41\pi}{42}.$$

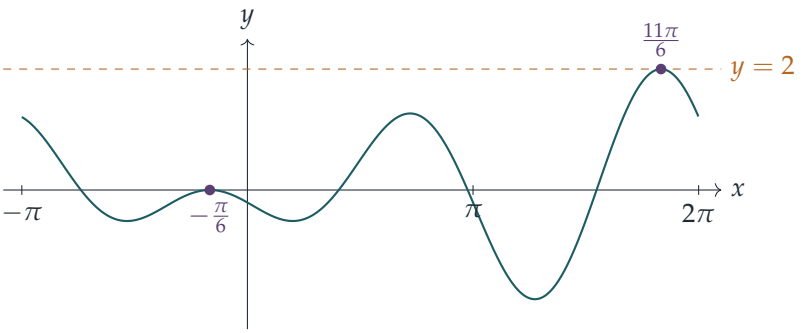
이다.

? 생각해 보기 두 목록에 모두 나타나는 값은 왜 특별할까?

$x = -\frac{\pi}{6}$에서는 두 코사인 인수가 모두 0이다. 각 인수는 영점을 지나는 코사인이므로 그 점에서 부호가 바뀐다(cos가 0인 곳에서 sin은 ± 1이므로 도함수(derivative)가 0이 아니다). 그러므로 $x = -\frac{\pi}{6}$ 근처에서 f는 상수와 $(x + \frac{\pi}{6})^2$의 곱처럼 행동한다. 부호 변화 두 번을 곱하면 부호 변화가 없다. 실제로 x가 증가하며 $-\frac{\pi}{6}$을 지날 때, 첫째 인수는 양에서 음으로 바뀌고(그 각이 증가하며 $\frac{\pi}{2}$를 지난다) 둘째 인수는 음에서 양으로 바뀐다(그 각이 증가하며 $-\frac{\pi}{2}$를 지난다). 따라서 f는 양쪽 모두에서 음이다. 그러므로 곡선은 다음 점에서 x축을 가로지르지 않고 접한다.

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

나머지 세 영점에서는 인수 하나만 0이 되므로 f의 부호가 바뀌고 곡선은 축을 가로지른다.



소문항 (iii)

$\cos A \le 1$이고 $\cos B \le 1$이므로 $f(x) \le 2$이며, 등호는 $\cos A = 1$ 이고 $\cos B = 1$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 원래 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \iff 2x+\frac{\pi}{3}=2m\pi \iff x=-\frac{\pi}{6}+m\pi,$$
$$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2n\pi \iff x=\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{3},$$

여기서 m, n은 정수이다. 두 조건이 함께 성립하는 것은 $-\frac{\pi}{6}+m\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{3}$일 때이다. 양변에 $\frac{6}{\pi}$를 곱하면 $6m-1=3+8n$, 즉

$$3m-4n=2.$$

이다. 한 해는 $m=2$, $n=1$이고, 3과 4가 서로소(coprime)이므로 일반해는 $m=2+4t$, $n=1+3t$이다. 따라서 $f(x)=2$인 것은

$$x=-\frac{\pi}{6}+(2+4t)\pi=\frac{11\pi}{6}+4t\pi, \qquad t\in\mathbb{Z}.$$

일 때이고, 그때뿐이다. 이러한 값 가운데 $0\le x\le 2\pi$에 속하는 것은

$$x=\frac{11\pi}{6}.$$

뿐이다. 확인: $2\cdot\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=4\pi$이고 $\frac{3}{2}\cdot\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$이므로 $f=\cos 4\pi+\sin\frac{5\pi}{2}=1+1=2$이다.

검산

- 인수분해한 식은 임의로 고른 10^4개의 점에서 원래의 f와 (10^{-12} 이내로) 일치한다.
- $[-\pi,\pi]$를 수치적으로 훑어보면 부호 변화는 $-\frac{31\pi}{42}$, $\frac{17\pi}{42}$, $\frac{41\pi}{42}$ 근처에서만 나타난다. $-\frac{\pi}{6}$에서는 **양쪽** 모두에서 $f(-\frac{\pi}{6}\pm 10^{-3})\approx -8.7\times 10^{-7}$이므로, 부호 변화 없이 접하는 영점임이 확인된다.
- $[0,2\pi]$에서 f의 최댓값은 2이고, $x\approx 1.8333\pi=\frac{11\pi}{6}$에서 이 값을 가진다.

흔한 실수

- $-\frac{\pi}{6}$을 두 번 적거나, 이 값이 두 인수 모두에서 나온다는 점을 놓치는 것. 바로 이 점이 접점을 찾는 단서이다.
- $\cos A = 1$과 $\cos B = 1$을 따로 풀고 멈추는 것. 두 조건은 같은 x에서 동시에 성립해야 하며, 이를 위해서는 정수 방정식 $3m - 4n = 2$가 필요하다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 사실 두 주기 운동이 언제 맞아떨어지는가에 관한 문제이다. 조건 $3m - 4n = 2$는 일차 디오판토스 방정식(linear Diophantine equation)이고, $\gcd(3,4)$가 2를 나누므로 해를 가진다. 같은 아이디어를 여러 진동수에 한꺼번에 적용하면 푸리에 급수(Fourier series)로 이어지고, 주기함수들의 합이 언제 다시 주기함수가 되는가 하는 질문(주기들의 비가 유리수일 때뿐이다)으로도 이어진다. 그 바탕에 있는 정수론(number theory)을 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*을 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.