풀이

STEP II 2008, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2008, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q5

핵심 아이디어

두 적분(integral) 모두 도함수(derivative)를 알아보면 풀린다. 첫 번째 적분에서는 분자(numerator) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$가 분모(denominator) $1+\sin^2 x$의 도함수와 정확히 같으므로, 보자마자 적분이 로그(logarithm)가 됨을 알 수 있다. 두 번째 적분에서는 $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$로 고쳐 쓴 다음, 분자에 홀로 있는 $\sin x$를 보고 $c = \cos x$로 치환(substitution)하면 된다. 그러면 전형적인 부분분수(partial fractions) 적분이 남는다. 그다음 두 답을 비교하는 일은 $\sqrt{2}$가 들어간 두 수를 비교하는 일로 바뀌며, 마지막 부분의 부등식(inequality)들은 바로 이 비교를 해결하도록 만들어져 있다.

풀이

두 적분

분자가 $\sin 2x$인 적분을 I_1, 분자가 $\sin x$인 적분을 I_2라 하자.

I_1의 경우, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sin^2 x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$이므로 피적분함수(integrand)는 $f(x) = 1+\sin^2 x > 0$에 대하여 $f'(x)/f(x)$ 꼴이다. 따라서

$$I_1 = \Big[\ln(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

I_2의 경우, $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$로 쓰고 $c = \cos x$로 치환하면 $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$이다. x가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 c는 1에서 0까지 줄어든다. 음의 부호 때문에 적분 구간의 위끝과 아래끝이 뒤바뀐다.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}c}{2-c^2}.$$

부분분수를 이용하면

$$\frac{1}{2-c^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}+c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-c} + \frac{1}{\sqrt{2}+c}\right),$$

이고, $0 \le c \le 1$에서 두 분모는 모두 양수이므로

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+c) - \ln(\sqrt{2}-c)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

이 식은 깔끔하게 정리된다. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$이므로 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$이고, 따라서

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

부등식

$(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^4 = 4$, $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$를 이용하여 이항정리(binomial theorem)를 적용하면

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\cdot 2 + 10\cdot 2\sqrt{2} + 5\cdot 4 + 4\sqrt{2} \\ &= 41 + 29\sqrt{2}.\end{aligned}$$

이제 $2 < 4$이므로 $\sqrt{2} < 2$이고, 따라서 $29\sqrt{2} < 58$이며 $(1+\sqrt{2})^5 < 41 + 58 = 99$이다. 이로써 요구된 부등식이 성립한다.

다음으로 $1.4^2 = 1.96 < 2$이고, 1.4와 $\sqrt{2}$가 모두 양수이므로 제곱해도 대소 관계가 보존된다. 따라서 $\sqrt{2} > 1.4$이다.

> **생각해 보기** $(1+\sqrt{2})^5 < 99$와 $\sqrt{2} > 1.4$가 도대체 어떻게 $2^{\sqrt{2}}$에 대해 무언가를 알려 줄 수 있을까?

$1.4 = \frac{7}{5}$로 쓰자. 그러면 $2^{7/5}$는 $2^7 = 128$의 다섯제곱근이고, $1+\sqrt{2}$의 다섯제곱은 방금 위로 유계임을 보인 값이다. 정확히 말하면, $t \mapsto 2^t$가 증가함수(increasing function)이고 $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$이므로

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5}.$$

또한 $(1+\sqrt{2})^5 < 99 < 128 = (2^{7/5})^5$이고, $y > 0$에서 $y \mapsto y^5$가 증가함수이므로 양의 다섯제곱근을 취하면 $1+\sqrt{2} < 2^{7/5}$를 얻는다. 이를 합치면

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5} > 1 + \sqrt{2}.$$

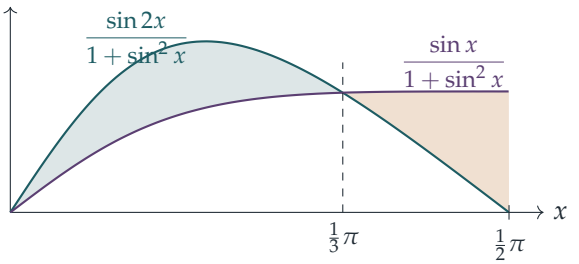
어느 적분이 더 큰가?

함수 ln은 증가함수이므로 마지막 부등식에서 $\ln(2^{\sqrt{2}}) > \ln(1+\sqrt{2})$, 즉 $\sqrt{2}\ln 2 > \ln(1+\sqrt{2})$를 얻는다. $\sqrt{2} > 0$으로 나누면

$$I_1 = \ln 2 > \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = I_2.$$

따라서 분자가 $\sin 2x$인 적분이 더 크다.

이 비교 결과는 피적분함수만 보고 바로 읽어 낼 수 있는 것이 아니다. $\sin 2x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1)$이므로 첫 번째 피적분함수는 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$에서는 더 크고 $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 더 작다.



문제는 청록색 영역이 호박색 영역보다 큰가 하는 것인데, 실제로 더 크기는 하지만 그 차이는 약 0.07에 불과하다. 그래서 $\sqrt{2}$를 다루는 세심한 계산이 필요했던 것이다.

검산

- 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_1 \approx 0.693147$, $I_2 \approx 0.623225$를 얻으며, 이는 소수점 아래 열째 자리까지 $\ln 2$ 및 $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$와 일치한다.
- $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82.01$이고 $41 + 29\sqrt{2} \approx 82.01$이다. 99보다 한참 작다.
- $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$, $2^{1.4} \approx 2.639$, $1+\sqrt{2} \approx 2.414$로, 주장한 순서와 같다.
- I_2에 대한 타당성 검사: 피적분함수는 $\frac{1}{2}\sin x$와 $\sin x$ 사이에 있으므로 $\frac{1}{2} < I_2 < 1$이어야 하며, 0.62는 실제로 그렇다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ 때문에 적분 구간이 뒤바뀐다는 것을 잊어, 양의 피적분함수의 적분값이 음수로 나오는 경우.

- I_2를 $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$로 남겨 두는 경우: 이것이 $(\sqrt{2}+1)^2$임을 알아채지 못하면, 마지막 부분의 $1+\sqrt{2}$와의 연결 고리가 드러나지 않는다.
- 계산기로 $2^{\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$를 확인하고 그냥 주장하는 경우. 문제는 2^t와 y^5의 단조성(monotonicity)을 밝히면서 $2^{7/5}$를 거치는 부등식의 연쇄를 요구한다.

STEP 너머

$2^{\sqrt{2}}$는 도대체 무슨 뜻일까? 대학에서는 이것을 $e^{\sqrt{2}\ln 2}$로 **정의**하며, 우리가 사용한 사실, 즉 t가 유리수일 때뿐만 아니라 무리수일 때에도 2^t가 t에 대하여 증가한다는 사실은 첫 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 증명하는 지수함수(exponential function)의 성질들로부터 따라 나온다. (겔폰트(Gelfond)와 슈나이더(Schneider)의 유명한 정리에 따르면 $2^{\sqrt{2}}$는 사실 초월수(transcendental number)이다.) e^x와 $\ln x$를 엄밀하게 구성하는 방법은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.