풀이

STEP II 2008, 문제 4

순수수학 • 음함수 미분법

> **STEP II 2008, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q4

핵심 아이디어

두 직선 사이의 각은 벡터(vector)로 다루는 것이 가장 쉽다. $F(x,y)=1$의 법선(normal)은 ∇F 방향을 향하고, 평면 위의 두 벡터 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{n}$에 대하여 둘 사이의 각의 tan 값은 |외적|을 내적(dot product)으로 나눈 값이다. 여기서 내적은 정확히 곡선의 방정식의 좌변, 즉 1이 된다. 그다음에는 θ가 정상(stationary)일 필요충분조건이 y^2-x^2가 정상인 것이 되고, 나머지는 x^2+y^2와 xy를 이용한 대수 계산이다.

풀이

기울기

$x^2+y^2+2axy=1$을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2a\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad (ax+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(x+ay).$$

따라서 $ax+y\neq 0$이면 기울기(gradient)는 $-\dfrac{x+ay}{ax+y}$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

각 θ

접선(tangent)의 방향은 $(ax+y,\ -(x+ay))$이므로, 법선의 방향은 이에 수직인 벡터

$$\mathbf{n}=(x+ay,\ ax+y),$$

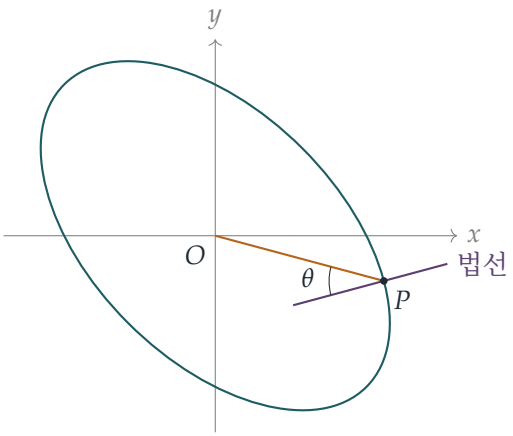
이다. (이것은 $F = x^2 + y^2 + 2axy$에 대한 $\frac{1}{2}\nabla F$이며, $ax + y = 0$인 곳에서도 의미가 있다.) 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 $\mathbf{p} = (x, y)$이다. $\mathbf{p}$와 $\mathbf{n}$ 사이의 각을 ϕ라 하자. 그러면

$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\cos\phi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = x(x+ay) + y(ax+y) = x^2 + y^2 + 2axy = 1,$$
$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\sin\phi = |x(ax+y) - y(x+ay)| = |ax^2 - ay^2| = a|y^2 - x^2|,$$

이다. 여기서 둘째 줄은 2차원 외적(cross product)의 크기(즉 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{n}$이 만드는 평행사변형(parallelogram)의 넓이)이고, $a > 0$이다.

내적이 $+1 > 0$이므로 ϕ는 이미 예각(acute)(또는 0)이고, 따라서 $\phi = \theta$이다. 두 줄을 나누면

$$\tan\theta = a\,|y^2 - x^2|.$$



그림($a = \frac{1}{2}$인 경우)은 곡선을 보여 준다. $0 < a < 1$이므로 이 곡선은 축이 $y = \pm x$ 위에 놓인 타원(ellipse)이다. 그림에 표시한 점 P는 θ가 최대가 되는 점 가운데 하나이다.

소문항 (i)

함수 $t \mapsto \arctan(t)$는 순증가하므로, $f \neq 0$인 곳에서 θ는 $f = y^2 - x^2$의 매끄러운 증가함수이다.

? **생각해 보기** 절댓값 때문에 꺾이는 점, 즉 $y^2 = x^2$인 점에서는 어떻게 되는가?

그런 점에서는 $\theta = 0$이다. 그런 점에서 θ의 도함수가 0이면 $a|f|$를 x의 변화량으로 나눈 값이 0으로 수렴하므로, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$이어야 한다. 따라서 모든 경우에

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 - x^2) = 0 \implies y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x.$$

여기서는 기울기 공식을 쓰고 있으므로 $ax + y \neq 0$이다(이 조건이 자동으로 성립함은 아래

에서 확인한다). 대입하고 $ax+y$를 곱하면

$$-y(x+ay) = x(ax+y) \implies -xy - ay^2 = ax^2 + xy \implies a(x^2+y^2) + 2xy = 0.$$

이것이 (i)이다.

덧붙여, 만약 $ax+y=0$이면 (i)로부터 $ax^2(1+a^2) - 2ax^2 = -a(1-a^2)x^2 = 0$이 되어 $x=y=0$인데, 이 점은 곡선 위에 있지 않다. 따라서 그런 점은 결코 문제를 일으키지 않는다.

소문항 (ii)

$S = x^2+y^2$라 하자. (i)에 의해 $2xy = -aS$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$S + a(-aS) = 1 \quad \implies \quad S = \frac{1}{1-a^2}.$$

그러므로

$$x^2+y^2+2xy = S - aS = \frac{1-a}{1-a^2} = \frac{1}{1+a},$$

즉 $(1+a)(x^2+y^2+2xy) = 1$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iii)

$|y^2-x^2|$를 구해야 한다. $(y^2-x^2)^2 = (x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = S^2 - (2xy)^2$을 이용하면

$$(y^2-x^2)^2 = S^2 - a^2S^2 = (1-a^2)\cdot\frac{1}{(1-a^2)^2} = \frac{1}{1-a^2}.$$

양의 제곱근을 취하면($0<a<1$이므로 가능하다) $|y^2-x^2| = 1/\sqrt{1-a^2}$이고, 따라서

$$\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

검산

- 축을 회전한다. $u = (x+y)/\sqrt{2}$, $v = (x-y)/\sqrt{2}$로 두면 곡선은 $(1+a)u^2 + (1-a)v^2 = 1$이 되고 $y^2-x^2 = -2uv$이다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $1 \geq 2\sqrt{(1-a^2)}\,|uv|$이므로 $\tan\theta = 2a|uv| \leq a/\sqrt{1-a^2}$이고, 등호는 $(1+a)u^2 = \frac{1}{2}$일 때 성립한다. $x^2+y^2+2xy = 2u^2$이므로 이 등호 조건은 정확히 (ii)이다. 따라서 정상값은 θ의 최댓값이다.
- $a = \frac{1}{2}$일 때: $P \approx (1.1154, -0.2989)$는 곡선의 방정식과 (i)을 만족하고, $\tan\theta = \frac{1}{2}|y^2-x^2| \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$이므로 $\theta = 30^\circ$이다. 여러 a 값에 대하여 타원을 따라 $\tan\theta$를 수치적으로 조사하면 최댓값이 정확히 이 값들에서 나타난다.

- $a \to 0$이면 곡선은 단위원(unit circle)이 되고, 단위원의 법선은 O를 지나므로 $\theta \to 0$이다. 이는 $\tan\theta \to 0$과 일치한다.

흔한 실수

- OP와 법선의 기울기로 $\tan(\alpha - \beta)$를 쓰는 것: 이 방법도 되기는 하지만 $x = 0$인 경우와 부호에 주의해야 하며, 벡터를 이용하면 두 문제를 모두 피할 수 있다.
- 구한 각이 왜 **예각**인지를 잊는 것: 내적이 $+1$이라는 사실이 이를 결정한다.
- $|y^2 - x^2|$를 구하려고 제곱한 뒤 양의 제곱근을 취하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$x^2 + y^2 + 2axy$를 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$에 대한 이차형식(quadratic form) $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x}$로 쓰면, 타원의 축은 A의 고유벡터(eigenvector) $(1,1)$과 $(1,-1)$이고, 고윳값(eigenvalue) $1 \pm a$가 반축(semi-axis)을 결정한다. 이러한 대칭행렬(symmetric matrix)의 대각화(diagonalisation)는 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)의 핵심 아이디어이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.