풀이

STEP II 2008, 문제 3

순수수학 • 부등식과 귀류법

STEP II 2008, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q3

핵심 아이디어

그래프를 그려 보면 $x \geq 0$인 범위에서 삼차함수(cubic)의 곡선은 x축 아래로 내려가지 않으며, "$y \geq 0$"을 정리하면 부등식 $x^2(1-x) \leq 4/27$을 얻는다. 귀류법(proof by contradiction) 부분에서는, 세 수 $bc(1-a)$, $ca(1-b)$, $ab(1-c)$를 하나씩 보면 다루기 까다롭지만 이들의 곱은 $a^2(1-a)\cdot b^2(1-b)\cdot c^2(1-c)$로 다시 묶을 수 있고, 이것은 첫 번째 결과로 제어된다는 점에 주목한다. 소문항 (ii)는 삼차식 대신 이차식(quadratic)을 써서 같은 기법을 적용하는 것이다.

풀이

소문항 (i): 곡선

$y = 27x^3 - 27x^2 + 4$를 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 81x^2 - 54x = 27x(3x-2),$$

이고, 이는 $x = 0$과 $x = \frac{2}{3}$에서 0이 된다. $x = 0$에서 $y = 4$이고, $x = \frac{2}{3}$에서는

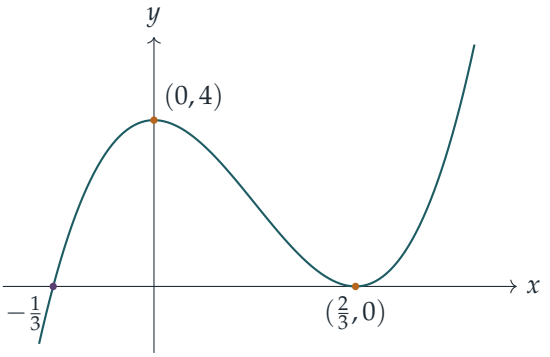
$$y = 27\cdot\tfrac{8}{27} - 27\cdot\tfrac{4}{9} + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

이다. $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 162x - 54$는 $x = 0$에서 $-54 < 0$이고 $x = \frac{2}{3}$에서 $54 > 0$이므로, 두 극점(turning point)은 $(0,4)$에서의 극대(maximum)와 $(\frac{2}{3},0)$에서의 극소(minimum)이다.

극소점이 x축 위에 있으므로 곡선은 그곳에서 축에 접하고, 따라서 $(3x-2)^2$이 인수이다. x^3의 계수(coefficient)와 상수항(constant term)을 비교하면

$$27x^3 - 27x^2 + 4 = (3x-2)^2(3x+1),$$

이므로 곡선이 축과 만나는 나머지 한 곳은 $x = -\frac{1}{3}$뿐이다. 곡선은 $-\infty$에서 올라와 $x = -\frac{1}{3}$에서 축을 가로지르고, $(0,4)$에서 최고점에 이른 뒤 내려와 $(\frac{2}{3},0)$에서 축에 접하고, 다시 올라간다.



소문항 (i): 부등식

$x \geq 0$이면 $3x+1 > 0$이고 $(3x-2)^2 \geq 0$이므로, 인수분해(factorisation)로부터 $27x^3 - 27x^2 + 4 \geq 0$이다. (그래프로 보아도 마찬가지이다. $x \geq 0$에서 곡선의 가장 낮은 점은 극소점 $(\frac{2}{3},0)$이다.) 이를 정리하면

$$4 \geq 27x^2 - 27x^3 = 27x^2(1-x), \qquad \text{따라서} \qquad x^2(1-x) \leq \frac{4}{27} \quad \text{임의의} x \geq 0,$$

이고, 등호는 $x = \frac{2}{3}$일 때만 성립한다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i): 모순

모순을 이끌어 내기 위해 세 수가 모두 $4/27$보다 크다고 가정하자.

$$bc(1-a) > \tfrac{4}{27}, \qquad ca(1-b) > \tfrac{4}{27}, \qquad ab(1-c) > \tfrac{4}{27}.$$

여기에 나오는 여섯 개의 양은 모두 양수이므로, 세 부등식을 서로 곱할 수 있다.

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) > \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

? **생각해 보기** 첫 번째 결과가 이렇게 뒤섞인 곱에 대해 어떤 정보를 줄 수 있을까?

좌변을 각 문자가 자신의 괄호와 함께 모이도록 다시 묶는다.

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) = [a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)].$$

a, b, c는 각각 음이 아니므로, 첫 번째 결과에 의해 각 괄호는 0 이상(왜냐하면 $1-a \geq 0$ 등이 성립하므로)이고 $4/27$ 이하이다. 음이 아닌 수들 사이의 이 세 부등식을 곱하면

$$[a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)] \leq \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

이다. 이는 위의 엄격한 부등식에 모순이다. 따라서 가정이 거짓이었고, $bc(1-a)$, $ca(1-b)$, $ab(1-c)$ 중 적어도 하나는 $4/27$ 이하이다.

소문항 (ii)

같은 아이디어가 이차식에서도 통한다. 임의의 실수 t에 대하여, 완전제곱식 만들기(completing the square)로

$$t(1-t) = \tfrac{1}{4} - (t-\tfrac{1}{2})^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

이다. 모순을 이끌어 내기 위해 $p(1-q) > \frac{1}{4}$이고 $q(1-p) > \frac{1}{4}$라고 가정하자. 양변이 모두 양수이므로 곱하면

$$p(1-q)\cdot q(1-p) > \tfrac{1}{16}.$$

이다. 그런데 좌변은 $[p(1-p)][q(1-q)]$로 다시 묶을 수 있고, $0 < p, q < 1$이므로 각 괄호는 0과 $\frac{1}{4}$ 사이에 있어 곱은 많아야 $\frac{1}{16}$이다. 이는 모순이므로, $p(1-q)$와 $q(1-p)$ 중 적어도 하나는 $\frac{1}{4}$ 이하이다.

검산

- 등호가 성립하는 경우: $a = b = c = \frac{2}{3}$이면 (i)의 세 수가 모두 $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$이 되고, $p = q = \frac{1}{2}$이면 (ii)의 두 수가 모두 $\frac{1}{4}$가 된다. 따라서 상계 $4/27$과 $1/4$은 더 좋게 할 수 없다.
- $(3x-2)^2(3x+1) = (9x^2-12x+4)(3x+1) = 27x^3-27x^2+4$로 전개하면 인수분해가 맞음을 확인할 수 있다.
- 수치적으로, $[0,3]$에서 $x^2(1-x)$의 최댓값은 $0.148148\ldots = 4/27$이다. $(0,1)$에서 무작위로 뽑은 백만 개의 순서쌍 (a,b,c)에 대해 세 곱 중 가장 작은 값은 한 번도 0.1468을 넘지 않았고, 무작위로 뽑은 백만 개의 쌍에 대해 $p(1-q)$, $q(1-p)$ 중 작은 값은 한 번도 0.24998을 넘지 않았다.

흔한 실수

- 모든 것이 양수라는 말 없이 부등식을 곱하는 것. "$A > \alpha$, $B > \beta$이면 $AB > \alpha\beta$"라는 단계는 음수에 대해서는 성립하지 않으므로, 가정 $0 < a, b, c < 1$이 정말로 필요하다.
- 부등식 $x^2(1-x) \leq 4/27$을 거짓인 범위인 $x < 0$에서 사용하는 것($x = -1$을 대입해 보라).
- 특정한 한 수, 예를 들어 $bc(1-a)$만 작다는 것을 증명하는 것. 이 수는 작을 필요가 없다. a가 0에 가깝고 $b = c$가 1에 가까우면 이 수는 1에 가깝다.

STEP 너머

대칭적인 상계를 적용할 수 있도록 여러 양의 곱을 취하는 방법은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)과 가까운 사이이며, 이 부등식을 쓰면 첫 번째 결과를 바로 얻는다. $0 \leq x \leq 1$일 때, 합이 1인 $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$에 산술-기하 평균 부등식을 적용하면 $\frac{x^2}{4}(1-x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$을 얻는다. 이 논증에는 비둘기집 원리(pigeonhole principle)의 느낌도 있다. 곱이 작으면 모든 인수가 클 수는 없다. 이처럼 값을 어림하고 최적화하는 아이디어는 대학 1학년 해석학(analysis)에서 발전시킨다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 시작하기에 친절한 책이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 유형의 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.