풀이

STEP II 2008, 문제 2

순수수학 • 부분분수와 급수

> **STEP II 2008, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q2

핵심 아이디어

부분분수(partial fractions)를 이용하면 다루기 까다로운 유리함수(rational function) 하나를, 전개식을 이미 잘 알고 있는 세 조각으로 나눌 수 있다. 바로 등비급수(geometric series), 그 도함수(derivative), 그리고 $-x^2$에 대한 등비급수이다. 앞의 두 조각은 n에 비례하여 커지는 계수를 주고, 세 번째 조각은 언제나 $\pm\frac{1}{2}$만을 기여하며 주기 4로 반복된다. 문제의 "둘 중 하나"라는 결론은 바로 여기에서 나온다. 마지막 부분에서는 함수를 주어진 분수로 바꾸어 주는 x의 값을 찾아보자.

풀이

부분분수

$(1-x)^2$은 중복된 일차인수이고 $1+x^2$은 기약(irreducible) 이차식이므로

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

로 놓는다. 그러면 모든 x에 대하여

$$1+x = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

이 성립한다.

- $x=1$을 대입하면 $2=2B$이므로 $B=1$이다.
- $x=0$을 대입하면 $1=A+B+D$이므로 $A=-D$이다.
- $x=\mathrm{i}$를 대입하면(이것은 다항식 항등식이므로 허용된다) $1+\mathrm{i} = (C\mathrm{i}+D)(1-\mathrm{i})^2 =$

$(Ci + D)(-2i) = 2C - 2Di$이다. 실수부와 허수부를 비교하면 $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$이고, 따라서 $A = \frac{1}{2}$이다.

검산으로, 우변의 x^3의 계수는 $-A + C = 0$으로 좌변과 일치한다. 따라서

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{2(1+x^2)}.$$

이다.

계수

$|x| < 1$이면 세 전개식이 모두 수렴(converge)하고,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(1-x)} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n, \\
-\frac{1-x}{2(1+x^2)} &= -\tfrac{1}{2}(1-x)\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^7 + \cdots\right).
\end{aligned}$$

이다. 마지막 줄의 괄호 안의 계수는 $1, -1, -1, 1$이 주기 4로 반복된다. 즉 $n = 2k$이면 x^n의 계수는 $(-1)^k$이고, $n = 2k+1$이면 $-(-1)^k$이다. 따라서 세 번째 조각은 $n \equiv 0$ 또는 $3 \pmod 4$일 때 x^n에 $-\frac{1}{2}$를, $n \equiv 1$ 또는 $2 \pmod 4$일 때 $+\frac{1}{2}$를 기여한다.

> **생각해 보기** 주기가 4인 패턴이 왜 네 가지가 아니라 정확히 두 가지 경우를 만들어 내는가?

부호만이 중요하기 때문이다. 세 기여를 더하면

$$a_n = \tfrac{1}{2} + (n+1) \mp \tfrac{1}{2} = \begin{cases} n+1, & n \equiv 0 \text{ 또는 } 3 \pmod 4, \\ n+2, & n \equiv 1 \text{ 또는 } 2 \pmod 4, \end{cases}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 이 수열(sequence)은 $1, 3, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 11, 12, 12, \ldots$로 시작한다.

소수 근삿값

> **생각해 보기** x가 어떤 값일 때 함수의 값이 $\frac{11\,000}{8181}$이 되는가?

분모를 보면 $x = \frac{1}{10}$이 떠오른다. 이때 $(1-x)^2 = 0.81$, $1 + x^2 = 1.01$이므로 $(1-x)^2(1+x^2) = 0.8181$이고,

$$\frac{1 + \frac{1}{10}}{0.8181} = \frac{1.1}{0.8181} = \frac{11\,000}{8181}.$$

이다. $\frac{1}{10} < 1$이므로 급수 전개가 유효하고,

$$\frac{11\,000}{8181} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n} = 1 + 0.3 + 0.04 + 0.004 + 0.0005 + 0.00007 + \cdots .$$

이다. $a_n \leq 9$인 동안(즉 $n = 8$까지)은 계수가 그대로 소수점 아래 각 자리의 숫자가 된다: 1.34457889. 그 다음부터는 계수가 두 자리 수이므로 받아올림을 해야 한다.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{8} \frac{a_n}{10^n} &= 1.344\,578\,89 \\
+ 11 \times 10^{-9} &\to 1.344\,578\,901 \\
+ 12 \times 10^{-10} &\to 1.344\,578\,902\,2 \\
+ 12 \times 10^{-11} &\to 1.344\,578\,902\,32 \\
+ 13 \times 10^{-12} &\to 1.344\,578\,902\,333.
\end{aligned}$$

이후의 항들은 열한 번째 유효숫자(significant figure)부터만 바꾸므로, 유효숫자 아홉 자리까지

$$\frac{11\,000}{8181} \approx 1.344\,578\,90.$$

이다.

검산

- 함수에 $x = 0$을 대입하면 $1 = a_0$이고, $n = 0$은 $n + 1$인 경우에 해당한다. $(1 + x)(1 + 2x + \cdots)(1 - x^2 + \cdots)$를 전개하면 $1 + 3x + \cdots$이므로 $a_1 = 3 = 1 + 2$이다.
- 직접 나눗셈을 하면 $11\,000/8181 = 1.344\,578\,902\,33\ldots$로 급수의 결과와 일치한다. 또한 $n < 60$에 대하여 정확한 멱급수 나눗셈으로 a_n을 확인하였고, 부분분수 항등식도 여러 개의 무작위 유리수 점에서 확인하였다.

흔한 실수

- 받아올림을 잊는 것: a_n에서 숫자를 그대로 읽으면 1.34457889…가 되는데, 이는 아홉 번째 유효숫자에서 틀린다.
- $\frac{Cx+D}{1+x^2}$ 대신 $\frac{D}{1+x^2}$로 쓰는 것: 기약 이차식에는 일차식 분자가 필요하다.
- 1.344578902…를 1.34457890으로 반올림한 뒤 마지막 0을 빼 버리는 것: 여기서는 이 0도 유효숫자이다.

STEP 너머

유리함수는 언제나 멱급수(power series)로 나타낼 수 있으며, 그 계수는 n에 대한 다항식에 r^n 꼴의 항과 주기적인 패턴을 더한 것으로, 분모의 각 근마다 하나씩 대응한다. 이것이 **선형 점화식**(*linear recurrences*)과 **생성함수**(*generating functions*)의 이론이다. 여기서는 근 1(중근)과 $\pm$i가 각각 선형 증가와 주기 4의 흔들림을 만들어 낸다. 모든 분수가 결국에는 순환하는 소수로 나타나는 이유도 바로 이것이다. Wilf의 *generatingfunctionology*는 생생하고 무료로 볼 수 있는 입문서이며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이와 같은 취지의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.