풀이

STEP II 2008, 문제 11

역학 • 움직이는 쐐기 위의 입자

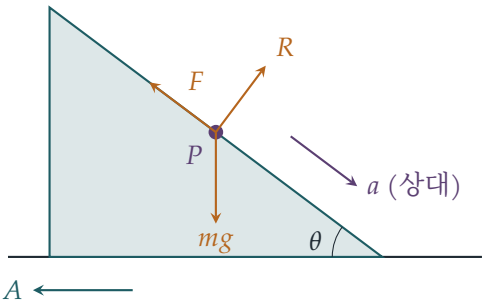
> **STEP II 2008, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q11

핵심 아이디어

계 바깥에서 수평 방향으로 미는 것이 없으므로(바닥이 매끄럽다), 입자와 쐐기를 합친 계의 수평 운동량(momentum)은 계속 0이다. 이 사실에서 쐐기의 가속도가 거의 저절로 나온다. 나머지는 모두 입자의 **실제** 가속도를 "쐐기에 대한 상대 가속도 더하기 쐐기의 가속도"로 쓴 다음, 입자에 작용하는 힘을 경사면에 평행한 방향과 수직인 방향으로 분해하면 얻어진다. 모든 것이 정지 상태에서 출발하고 가속도가 일정하므로, 정지한 관찰자가 보는 경로는 실제 가속도 방향의 직선이다.

풀이

P를 입자(particle)로, 쐐기(wedge)를 강체(rigid body)로 모형화한다. 바닥은 매끄럽고, 경사면은 마찰계수(coefficient of friction)가 μ인 거친 면이다. 수직인 면을 왼쪽에 두어 경사면이 오른쪽 아래로 내려가도록 한다. P가 오른쪽 아래로 미끄러지면 쐐기는 왼쪽으로 밀린다. 쐐기의 가속도를 **왼쪽** 방향으로 A라 하고, **쐐기에 대한** P의 경사면 아래 방향 가속도를 a라 하자. R을 P에 작용하는 수직항력(normal reaction), F를 마찰력(friction)이라 하자. 마찰력은 P가 미끄러져 내려가는 동안 경사면 위쪽으로 작용한다.



x축은 오른쪽으로, y축은 위쪽으로 잡는다. 경사면 아래 방향의 단위벡터(unit vector)는 $(\cos\theta, -\sin\theta)$이므로, P의 실제 가속도는 다음과 같다.

$$(a\cos\theta - A,\ -a\sin\theta).$$

소문항 (i): 쐐기의 가속도

"P와 쐐기"로 이루어진 계에 작용하는 외력은 중력과 매끄러운 바닥의 수직항력뿐이고, 둘 다 연직 방향이다. 따라서 전체 수평 운동량은 일정하며, 모든 것이 정지 상태에서 출발하므로 그 값은 0이다. 그러므로 $m\times$(가속도)의 수평 성분들의 합은 0이다.

$$m(a\cos\theta - A) + km(-A) = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{a\cos\theta}{k+1},$$

이것이 구하는 결과이다. (P와 쐐기 사이의 힘 R과 F는 내력이며, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 상쇄된다.)

소문항 (i): 45° 경로

? **생각해 보기** 관찰되는 경로가 왜 실제 가속도 방향의 직선이어야 하는가?

아래의 운동 방정식(equations of motion)에 의해 a와 A는 상수로 정해지므로, P의 실제 가속도는 상수 벡터이다. 정지 상태에서 출발하므로 속도는 항상 그 벡터의 t배이고 변위는 그 벡터의 $\frac{1}{2}t^2$배이다. 따라서 P는 그 방향의 고정된 직선을 따라 움직인다.

P의 가속도의 수평 성분은

$$a\cos\theta - \frac{a\cos\theta}{k+1} = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta,$$

이고, 연직 성분의 크기는 $a\sin\theta$이다. 경로가 45° 직선이라는 것은 이 둘이 같다는 뜻이다.

$$a\sin\theta = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{k}{k+1},$$

여기서 $a\cos\theta \neq 0$으로 나누었다(P가 실제로 미끄러지므로 $a > 0$이다). 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i): $k = 3$인 경우

이제 $\tan\theta = \frac{3}{4}$이므로 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$이고, $A = \frac{a\cdot 4/5}{4} = \frac{a}{5}$이다.

P에 대해 힘을 분해한다. P의 실제 가속도는 경사면 아래 방향 성분이 $a - A\cos\theta$이고, 바깥쪽 법선 방향 성분이 $-A\sin\theta$이다(쐐기의 왼쪽 방향 가속도가 이 성분들을 가지며, 상대 가속도는 순전히 경사면 방향이다).

경사면에 수직인 방향:

$$R - mg\cos\theta = -mA\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = m\left(\tfrac{4}{5}g - \tfrac{3}{25}a\right).$$

R이 $mg\cos\theta$보다 작다는 점에 주목하자. 쐐기가 P로부터 멀어지며 떨어지고 있기 때문이다.

경사면 아래 방향에서는 P가 미끄러지고 있으므로 $F = \mu R$이다.

$$mg\sin\theta - \mu R = m(a - A\cos\theta) = m\left(a - \tfrac{4}{25}a\right) = \tfrac{21}{25}ma.$$

R을 대입하고 $25/m$을 곱하면

$$15g - 20\mu g + 3\mu a = 21a \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{5g(3-4\mu)}{3(7-\mu)}.$$

이 값은 정확히 $\mu < \frac{3}{4} = \tan\theta$일 때 양수이며, P가 미끄러지려면 당연히 그래야 한다. 이 사실은 곧바로 소문항 (ii)로 이어진다.

소문항 (ii)

$\tan\theta \le \mu$이면 P는 그 자리에 머물고 쐐기도 움직이지 않는다고 주장한다.

정지 상태가 가능하다. 두 물체가 모두 움직이지 않는다면, P에 대해 $R = mg\cos\theta$이고 경사면 위쪽 방향의 마찰력 $F = mg\sin\theta$가 필요하다. 거친 접촉면은 $F \le \mu R$, 즉 $\sin\theta \le \mu\cos\theta$, 곧 $\tan\theta \le \mu$이면 이 마찰력을 제공할 수 있으며, 이것이 바로 주어진 조건이다. 이때 쐐기는 방향이 반대인 R과 F를 받는다. 이들의 수평 성분은 왼쪽으로 $R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta$, 오른쪽으로 $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$이므로 상쇄된다. 따라서 쐐기도 평형 상태(equilibrium)에 있고, 바닥은 연직 방향의 힘만 제공한다.

> ? **생각해 보기** 정지 상태가 가능하더라도, 그럼에도 P가 미끄러질 수 있을까?

미끄러지는 것은 불가능하다. 일반적인 k와 θ에 대해 P가 $F = \mu R$인 채로 미끄러져 내려간다고 가정하자. $s = \sin\theta - \mu\cos\theta$라 하자. 쐐기의 수평 방향 방정식은 $kmA = R\sin\theta - \mu R\cos\theta = Rs$이다. 이것을 법선 방향 방정식 $R = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$와 결합하면

$$R = \frac{kmg\cos\theta}{k + s\sin\theta}, \qquad a = \frac{(k+1)\,gs}{k + s\sin\theta}.$$

접촉이 유지되려면 $R > 0$이어야 하고, 이로부터 $k + s\sin\theta > 0$이다. 그러면 a는 s와 부호가 같다. 그런데 $\tan\theta \le \mu$는 $s \le 0$을 뜻하므로 $a \le 0$이 되어, 미끄러져 내려간다는 가정에 모순이다. 또한 P를 경사면 **위로** 미끄러지게 할 수 있는 것도 없다. 상대 운동을 시작하게 할 수 있는 것은 경사면 아래 방향 성분을 가진 중력뿐이기 때문이다. 따라서 $\tan\theta \le \mu$이면 P는 쐐기 위에 정지해 있고 쐐기도 바닥 위에 정지해 있다. ($\tan\theta = \mu$일 때는 마찰력이 한계 마찰력(limiting friction)이지만 P는 여전히 움직이지 않는다.)

검산

- $\mu = 0$, $k = 3$이면 $a = \frac{5g}{7}$, $A = \frac{g}{7}$이다. 그러면 P의 실제 가속도의 수평 성분은 $\frac{4}{5}\cdot\frac{5g}{7} - \frac{g}{7} = \frac{3g}{7}$이고 연직 성분은 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5g}{7} = \frac{3g}{7}$이므로, 실제로 45° 방향이다.
- $k \to \infty$일 때(움직이지 않는 쐐기), $A \to 0$이고 일반식은 $a \to g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$가 되어, 고정된 경사면에 대한 익숙한 결과와 같다.
- 수치적으로 $g = 9.8$, $k = 3$, $\mu = 0.2$로 두고 세 운동 방정식을 직접 풀면 $a \approx 5.284\ \mathrm{m\,s^{-2}}$를 얻으며, 이는 $\frac{5g(3-0.8)}{3(6.8)}$과 일치한다. 운동을 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면 수평 운동량은 0으로 유지되고 경로는 정확히 45°이다.

흔한 실수

- $R = mg\cos\theta$로 두는 것. 이는 쐐기가 고정되어 있을 때만 성립한다. 여기서는 쐐기가 멀어지는 방향으로 가속하므로 R이 더 작다.
- 쐐기의 가속도를 잊고 상대 가속도 a만으로 힘을 분해하는 것. 뉴턴의 제2법칙에는 실제 가속도가 필요하다.
- 소문항 (ii)에서 P가 미끄러지지 않는데도 마찰력을 μR로 가정하는 것. 마찰력은 **최대** μR이며, 필요한 만큼의 값을 가진다.

STEP 너머

소문항 (i)의 깔끔한 단계는 보존 법칙(conservation law)이다. 외력에 수평 성분이 없으므로 운동량의 한 성분이 보존된다. 대학 1학년 역학에서는 이것이 대칭성과 보존 법칙을 잇는 일반 원리가 된다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 라그랑지안이 의존하지 않는 좌표(여기서는 계 전체의 수평 위치)가 자동으로 보존되는 운동량을 준다. 매끄러운 쐐기와 블록은 그곳에서 다루는 표준적인 첫 예제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 바로 이런 종류의 문제들을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.