풀이

STEP II 2008, 문제 10

역학 • 벽과의 비스듬한 충돌

STEP II 2008, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q10

핵심 아이디어

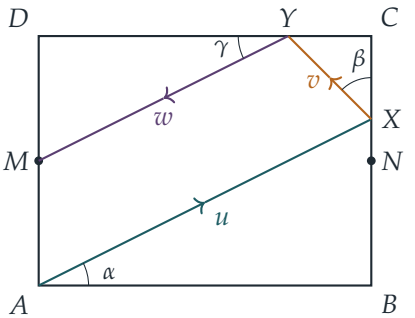
매끄러운(smooth) 벽에서는 충격량(impulse)이 벽에 수직이므로, 벽을 따르는 속도 성분(component)은 변하지 않고 벽으로 향하는 성분만 e배가 된다. 속도를 AB에 평행한 성분과 AD에 평행한 성분으로 나누면 모든 것이 명료해진다. 한 번 튕길 때마다 두 성분 중 하나만 e배가 되기 때문이다. 두 번 튕기고 나면 두 성분이 모두 e배가 되었으므로, 최종 방향과 운동 에너지(kinetic energy)가 한꺼번에 결정된다. 그러면 소문항 (ii)의 기하는 수평거리를 더하는 문제일 뿐이다.

풀이

공을 입자(particle)로, 당구대의 변을 매끄러운 벽으로 모형화한다. 원점을 A로, x축을 AB 방향으로, y축을 AD 방향으로 잡으면

$$B = (a, 0), \quad C = (a, 2b), \quad D = (0, 2b), \quad M = (0, b), \quad N = (a, b).$$

이다. 간단히 $t = \tan\alpha$라 쓰자.



소문항 (i)

처음 속도는 $(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha)$이다.

*X*에서의 충돌. 변 BC는 y축에 평행하다. 이 변은 매끄러우므로 공이 받는 충격량은 x 방향이고, 따라서 y 성분 $u\sin\alpha$는 변하지 않는다. 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 x 성분은 방향이 반대가 되고 e배가 된다. 충돌 후의 속도는

$$(-eu\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

이다. 각 $\beta = \angle CXY$는 y의 양의 방향을 가리키는 XC로부터 잰다. 따라서

$$\tan\beta = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha} = \frac{e}{\tan\alpha}, \qquad \text{즉,} \qquad \tan\alpha\tan\beta = e,$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

*Y*에서의 충돌. 변 DC는 x축에 평행하므로, 이번에는 x 성분이 변하지 않고 y 성분이 방향이 반대가 되며 e배가 된다. 충돌 후의 속도는

$$(-eu\cos\alpha,\ -eu\sin\alpha) = -e\,(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

이다. 이는 처음 속도의 음수배이므로, 경로의 마지막 구간은 AX에 평행하고 반대 방향으로 진행한다. 각 $\gamma = \angle DYM$은 x의 음의 방향을 가리키는 YD로부터 재며, 방향 $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$는 이와 각 α를 이룬다. 따라서

$$\gamma = \alpha.$$

이다.

소문항 (ii)

경로를 따라 x좌표를 추적한다.

*A*에서 *X*까지. 공은 너비 a를 가로지르는 동안 $a\tan\alpha$만큼 올라가므로 $X = (a,\ at)$이다.

*X*에서 *Y*까지. 공은 $2b - at$만큼 더 올라가며, 이 구간에서는 한 단위 올라갈 때마다 x 방향으로 $\tan\beta$만큼 움직인다(β를 세로 변으로부터 재기 때문이다). 소문항 (i)에서 얻은 $\tan\beta = e/t$를 쓰면, 공은 왼쪽으로 $(2b - at)\,e/t$만큼 움직이므로

$$x_Y = a - \frac{e(2b - at)}{t}.$$

이다.

*Y*에서 *M*까지. 공은 높이 $2b$에서 높이 b로, 즉 b만큼 내려가며, 수평선 아래로 각 $\gamma = \alpha$를 이룬다. 따라서 이동하는 수평 거리는 $b/\tan\alpha$이고, 이 거리만큼 가서 정확히 $x = 0$에 도달해야 한다.

$$x_Y = \frac{b}{t}.$$

생각해 보기 왜 x좌표만 추적해도 괜찮을까?

각 직선 구간은 앞 구간이 끝난 곳에서 시작하고, 그 방향은 소문항 (i)에서 알고 있다. 한 구간에서 공이 얼마나 오르내리는지 알면, 각이 옆으로 얼마나 움직이는지를 정해 준다. 각 구간 끝의 높이는 정해져 있으므로(o, 그다음 DC에서 $2b$, 그다음 M에서 b), 남은 조건은 옆으로 움직인 거리들이 맞아떨어져야 한다는 것뿐이다.

x_Y에 대한 두 식을 같게 놓고 t를 곱하면

$$\begin{aligned} b &= at - e(2b - at) \\ &= at(1+e) - 2be, \end{aligned}$$

이므로 $at(1+e) = b(1+2e)$이고, 따라서

$$\tan\alpha = \frac{(1+2e)b}{(1+e)a},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

이 샷은 언제나 가능하다. 이 $\tan\alpha$의 값은 모든 $e > 0$에 대해 양수이므로 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하는 각 α를 정한다. 이제 튕기는 점들이 원래 닿아야 할 변 위에 떨어지는지 확인해야 한다.

- X의 높이는 $at = \dfrac{1+2e}{1+e}\,b$이다. $e > 0$이면 $1+e < 1+2e < 2+2e$이므로, 이 값은 b와 $2b$ 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 X는 실제로 BC 위에 있고, C보다 아래, 포켓(pocket) N보다 위에 있으므로 공이 도중에 N에 빠지지 않는다.
- Y는 $x_Y = b/t = \dfrac{1+e}{1+2e}\,a$에 있고, 이 값은 $e > 0$일 때 0과 a 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 Y는 실제로 DC 위, D와 C 사이에 있다.

그러면 마지막 구간은 당구대 안에서 Y에서 M까지 직선으로 이어진다. 그러므로 e의 값이 무엇이든 경로의 모든 구간이 가능하다.

소문항 (iii)

소문항 (i)에서 최종 속도는 처음 속도의 $-e$배이므로 $w = eu$이다. (각 성분이 정확히 한 번씩 e배가 되었다는 점에서도 바로 알 수 있다.) 공의 질량을 m이라 하면 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$에서 $\frac{1}{2}me^2u^2$으로 줄어든다. 따라서 잃은 비율은

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}me^2u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - e^2.$$

이다. 이 값은 a, b나 각들과 무관하다. ($e > 1$이면 "손실"이 음수가 되어 벽이 에너지를 더해 주는 셈이 된다. 물리적으로는 맞지 않지만 계산은 성립한다.)

검산

- $a = 4$, $b = 1.5$, $e = \frac{1}{2}$(그림의 경우)이면 공식에서 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$이다. 그러면 $X = (4, 2)$, $Y = (3, 3)$이고, Y에서 기울기(gradient) $\frac{1}{2}$로 그은 직선은 수평으로 3 가는 동안 1.5 내려가 정확히 $M = (0, 1.5)$에 닿는다. 잃은 운동 에너지의 비율은 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이다.
- $e = 1$(완전 탄성(perfectly elastic))이면 $\tan\alpha = 3b/(2a)$이다. 당구대를 BC에 대해, 이어서 DC에 대해 대칭이동하여 펼치면, 경로는 A에서 M의 상까지 가는 직선이 되며, 이 상은 가로로 $2a$, 위로 $3b$ 떨어져 있다. 그러면 기울기가 똑같이 $3b/(2a)$이다. 에너지 손실은 없으며 $1 - e^2 = 0$과도 일치한다.
- a, b, e, u를 무작위로 20,000번 골라 튕김을 시뮬레이션한 결과, $\tan\alpha\tan\beta = e$, $\gamma = \alpha$, M에 도달함, 비율 $1 - e^2$이 모두 10^{-13} 이내에서 확인되었다.

흔한 실수

- 충돌할 때 속력 전체에 e를 곱하는 것. 벽에 수직인 성분만 바뀐다. 매끄러운 벽을 따르는 성분은 그대로이다.
- β를 XC가 아니라 BC의 법선으로부터 재는 것. 그러면 $\tan\beta$가 그 역수로 바뀐다.
- X가 N보다 위에 있고 Y가 D와 C 사이에 있는지 확인하는 것을 잊는 것. 이 확인이 바로 "샷이 가능하다"는 말의 내용이다.

STEP 너머

$e = 1$일 때 당구대를 대칭이동하여 당구 경로를 "펼치면" 경로가 직선이 된다. 이것이 수학적 당구(mathematical billiards)의 출발점이며, 수학적 당구는 동역학계(dynamical systems)와, 그리고 변의 각이 유리수배인 당구대의 경우에는 곡면 위의 기하와 연결된다. $e < 1$이면 반사는 더 이상 거울 반사와 같지 않지만, 속도를 성분으로 나누면 여전히 쉽게 다룰 수 있다. 충격량과 반발의 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라. 이런 종류의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에 도전해 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.