풀이

STEP II 2008, 문제 1

순수수학 • 복소 반복

> **STEP II 2008, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q1

핵심 아이디어

식 $x^2 - y^2$와 $2xy$는 $(x + \mathrm{i}y)^2$의 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)이다. 따라서 각 점을 복소수(complex number) $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$으로 쓰면, 두 성분으로 이루어진 규칙은 하나의 복소수 상수 c를 가진 단일 방정식 $z_{n+1} = z_n^2 + c$가 된다. 그러면 "상수 수열(constant sequence)"과 "주기(period) 2"라는 조건은 복소수 미지수 하나에 대한 이차방정식이 되고, 이는 근의 공식(quadratic formula)으로 풀 수 있다.

풀이

$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, $c = a + (b+2)\mathrm{i}$로 놓자.

$$z_n^2 + c = (x_n^2 - y_n^2 + a) + \mathrm{i}\,(2x_n y_n + b + 2),$$

이고, 두 복소수는 실수부와 허수부가 각각 같을 때 그리고 그때에만 같으므로, 주어진 규칙은 다음과 동치이다.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

a, b, x_n, y_n이 실수이므로 모든 점 (x, y)는 정확히 하나의 복소수에 대응하고, 그 역도 성립한다. 따라서 z로 계산해도 잃는 것이 없다.

소문항 (i)

$a = 1, b = -1$이면 $c = 1 + \mathrm{i}$이다. 수열은 $z_2 = z_1$일 때 그리고 그때에만 상수가 된다. 그러면 이후의 모든 단계가 같은 계산을 반복하기 때문이다. 따라서 다음이 성립해야 한다.

$$z^2 - z + (1+\mathrm{i}) = 0, \qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}}{2}.$$

$-3-4\mathrm{i}$의 제곱근을 구하기 위해 실수 p, q에 대하여 $(p+q\mathrm{i})^2 = -3-4\mathrm{i}$인 것을 찾자. 즉 $p^2-q^2=-3$이고 $pq=-2$이다. 그러면 $p=1$, $q=-2$가 조건을 만족하는데, $(1-2\mathrm{i})^2 = 1-4\mathrm{i}-4 = -3-4\mathrm{i}$이기 때문이다. 따라서

$$z = \frac{1 \pm (1-2\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i} \quad \text{또는} \quad \mathrm{i}.$$

그러므로 수열이 상수일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$(x_1, y_1) = (1,-1) \quad \text{또는} \quad (x_1, y_1) = (0,1).$$

직접 확인하면 $(1,-1) \mapsto (1-1+1,\ -2+1) = (1,-1)$이고 $(0,1) \mapsto (0-1+1,\ 0+1) = (0,1)$이다.

소문항 (ii)

이제 $z_1 = -1+\mathrm{i}$이므로 $z_1^2 = 1-2\mathrm{i}-1 = -2\mathrm{i}$이고

$$z_2 = c - 2\mathrm{i}.$$

$w = z_2$로 쓰자. 수열의 주기가 2라는 것은 $z_3 = z_1$이지만 $z_2 \neq z_1$인 경우이다. 일단 $z_3 = z_1$이면 규칙에 의해 수열은 $z_1, z_2, z_1, z_2, \ldots$와 같이 반복된다. $c = w + 2\mathrm{i}$를 이용하면

$$z_3 = w^2 + c = w^2 + w + 2\mathrm{i},$$

이므로 $z_3 = z_1$은 다음이 된다.

$$w^2 + w + 2\mathrm{i} = -1+\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + w + (1+\mathrm{i}) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 $w = z_2$를 미지수로 택하고, c를 택하지 않는가?

조건 $z_3 = z_1$은 어느 쪽으로 보아도 c에 대한 이차식이지만, w로 나타내면 상수 수열에 해당하는 $w = z_1$이 반드시 한 근이 된다. 따라서 이차방정식의 한 근은 이미 알고 있고, 나머지 근이 우리가 원하는 것이다. 실제로 $w = -1+\mathrm{i}$는 이 식을 만족한다: $(-1+\mathrm{i})^2 + (-1+\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = -2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = 0$. 두 근의 합은 -1이므로 다른 근은 $w = -\mathrm{i}$이다. (근의 공식으로도 같은 결과를 얻는다: $w = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}) = \frac{1}{2}(-1 \pm (1-2\mathrm{i}))$이며, 이는 (i)에서와 같은 제곱근이다.)

- $w = -1+\mathrm{i} = z_1$이면 $c = -1+3\mathrm{i}$, 즉 $a=-1$, $b=1$이다. 이때 $z_2 = z_1$이고 수열은 상수이므로, 주기는 2가 아니라 1이다.
- $w = -\mathrm{i}$이면 $c = \mathrm{i}$, 즉 $a=0$이고 $b+2=1$이다.

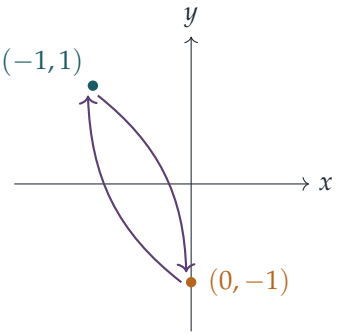
따라서 수열의 주기가 정확히 2일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$a = 0, \qquad b = -1.$$

좌표로 확인하자. $a = 0, b = -1$이면

$$(-1,1) \mapsto (1-1+0,\ -2+1) = (0,-1) \mapsto (0-1+0,\ 0+1) = (-1,1),$$

이고 두 점이 서로 다르므로 주기는 정확히 2이다.



검산

- 원래의 좌표 규칙을 반복 적용하면, $(1,-1)$과 $(0,1)$은 $a = 1, b = -1$일 때 고정점(fixed point)이고, $(-1,1) \to (0,-1) \to (-1,1)$은 $a = 0, b = -1$일 때 성립함을 알 수 있다.
- 제곱근 $1 - 2\mathrm{i}$는 제곱해서 확인할 수 있고, 인수분해 $w^2 + w + 1 + \mathrm{i} = (w + 1 - \mathrm{i})(w + \mathrm{i})$도 마찬가지로 확인할 수 있다. 두 근의 곱은 $(-1+\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$이다.
- 임의의 시작값들에서 수치적으로 근을 찾아본 결과, (i)에서는 다른 고정점이 없었고, (ii)에서는 (a,b) 가운데 $z_3 = z_1$을 만족하는 것이 상수 수열을 주는 $(-1,1)$ 외에는 없었다.

흔한 실수

- 둘째 성분의 "+2"를 잊어서 $a + (b+2)\mathrm{i}$ 대신 $c = a + b\mathrm{i}$로 잡는 것.
- (ii)의 두 번째 답으로 $a = -1, b = 1$을 제시하는 것. 이 수열은 상수이므로 주기가 1이다.
- 실수 좌표로만 계산하다가 연립 이차방정식에서 길을 잃는 것. 이 방법으로도 풀 수 있지만, 복소수 형태가 훨씬 짧다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto z^2 + c$는 복소 동역학(complex dynamics)에서 가장 유명한 예이다. 망델브로 집합(Mandelbrot set)은 0의 궤도가 유계로 남는 c들의 집합이며, 그 가장 큰 두 부분인 주 카디

오이드(main cardioid)와 그 왼쪽의 원판은 이 사상이 끌개 고정점(attracting fixed point) 또는 끌개 2-주기(2-cycle)를 갖는 c들로 이루어진다. 여기서도 2-주기에 대한 방정식에는 고정점에서 오는 인수가 있었다. 일반적으로 $(z^2+c)^2+c-z=(z^2-z+c)(z^2+z+c+1)$이다. 이 배경에 있는 기하학에 대한 읽기 쉬운 입문서로는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.