풀이

STEP I 2008, 문제 9

역학 • 굴러가는 고리의 운동량

> **STEP I 2008, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q9

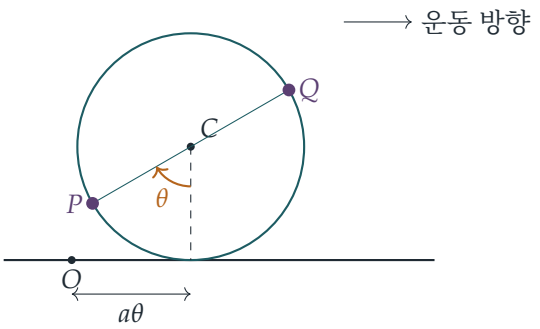
핵심 아이디어

미끄러지지 않고 구르는 운동(rolling without slipping)에서는 병진(translation)과 회전(rotation)이 서로 묶여 있다. 고리가 θ만큼 돌았을 때 그 중심은 $a\theta$만큼 이동하는데, 이는 테이블에 닿았던 테두리의 길이와 같다. 따라서 각 입자의 위치는 "중심 더하기 회전하는 반지름"이고, 이를 미분하면 속도를 얻는다. 마지막 부분에서는 외력(external force)에 수평 성분이 없으므로 전체 수평 운동량(momentum)이 변할 수 없고, 그 운동량이 $\dot{\theta}$의 상수배가 된다는 점에 주목한다.

풀이

P의 위치와 속력

P와 Q를 가벼운 고리 위의 입자로 모형화한다. 원점을 P의 출발점에 두고, x축은 구르는 직선을 따라(고리가 움직이는 방향으로), y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 고리가 양의 x방향으로 구른다고 하면, 아래 그림에서 고리는 시계 방향으로 돈다.



고리가 미끄러지지 않으므로 테이블 위로 굴러 닿은 테두리의 호의 길이는 중심이 이동한 거리와 같고, 따라서 중심 C는 $(a\theta,\ a)$에 있다. 처음에 CP는 바로 아래를 향한다. 시계 방향으로 θ만큼 돈 뒤 벡터 $\overrightarrow{CP}$는 $(-a\sin\theta,\ -a\cos\theta)$이다. 따라서

$$\boxed{P = (a\theta - a\sin\theta,\ a - a\cos\theta)}$$

이다(사이클로이드(cycloid)). 연쇄법칙(chain rule)을 써서 t에 대해 미분하면

$$\dot{x}_P = a\dot{\theta}(1-\cos\theta), \qquad \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

이므로

$$v_P^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

이다. 여기서 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$를 이용했다. 따라서 P의 속력은

$$v_P = 2a\,|\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta| \qquad (= 2a\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta, \text{단} 0 \le \theta \le 2\pi,\ \dot{\theta} \ge 0).$$

이다. 이 값은 θ가 2π의 배수일 때, 즉 정확히 P가 접점일 때 0이 되며, 이는 구르는 운동이 요구하는 바와 같다.

운동에너지

Q는 지름의 반대쪽 끝에 있으므로 $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$이고

$$Q = (a\theta + a\sin\theta,\ a + a\cos\theta), \qquad \dot{x}_Q = a\dot{\theta}(1+\cos\theta), \quad \dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\sin\theta.$$

이다. 같은 방법으로

$$v_Q^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

이다. 고리는 가벼우므로 운동에너지(kinetic energy)는 입자들만의 운동에너지이다.

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 + \tfrac{1}{2}mv_Q^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2(\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta) = 2ma^2\dot{\theta}^2,$$

따라서 요구한 결과를 얻는다.

일정한 속력

외력은 입자들의 무게 mg와 테이블의 반력(reaction)이며, 모두 연직 방향이다. 따라서 계에 작용하는 전체 수평 힘은 0이고, 계에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해 전체 수평 운동량은 일정하다. (고리는 가벼우므로 운동량을 갖지 않는다.)

생각해 보기 입자들이 연직 방향으로도 움직이는데, 왜 수평 운동량만으로 충분할까?

수평 운동량이 공교롭게도 $\dot\theta$에만 의존하기 때문이다. 수평 속도를 더하면

$$m\dot x_P + m\dot x_Q = ma\dot\theta(1-\cos\theta) + ma\dot\theta(1+\cos\theta) = 2ma\dot\theta.$$

이다. $\cos\theta$ 항들이 소거된다. 계의 질량중심(centre of mass)은 C이고, 이 점은 항상 속도 $a\dot\theta$로 수평으로 움직이기 때문이다. $2ma\dot\theta$가 일정하므로 $\dot\theta$가 일정하고, 따라서 고리의 속력(중심의 속력 $a\dot\theta$)도 일정하다. □

에너지로 보이는 방법. P와 Q의 높이의 합은 $(a-a\cos\theta)+(a+a\cos\theta)=2a$이므로 위치에너지(potential energy) $2mga$는 전혀 변하지 않는다. 반력은 접점에 작용하는데, 구르는 동안 접점은 순간적으로 정지해 있으므로 반력은 일을 하지 않는다. 따라서 $T = 2ma^2\dot\theta^2$는 일정하고, $|\dot\theta|$도 일정하다. 또 $\dot\theta$는 연속적으로 변하며 0을 지나지 않고는 한 부호에서 다른 부호로 건너뛸 수 없으므로 $\dot\theta$ 자체가 일정하다. 운동량을 이용한 논증은 이 마지막 단계가 필요 없으며, 그래서 그것을 먼저 사용했다.

검산

- $\theta = \pi$일 때 P는 꼭대기에 있다. 공식은 $P = (a\pi, 2a)$와 속력 $2a\dot\theta$를 주는데, 이는 중심 속력의 두 배로, 구르는 바퀴의 꼭대기에 대해 잘 알려진 결과이다.
- 운동에너지는 $\frac12(2m)(a\dot\theta)^2 + \frac12(2ma^2)\dot\theta^2$와 같다. 즉 질량중심의 병진 운동에 질량중심에 대한 회전을 더한 것이며, 관성모멘트(moment of inertia)는 $2ma^2$이다. 두 항은 각각 $ma^2\dot\theta^2$이다.
- 수치적으로 $a = 1.3$, $\dot\theta = 2.1$, $\theta = 1$로 두고 위치를 유한차분으로 미분하면 $v_P^2 + v_Q^2 = 4a^2\dot\theta^2 \approx 29.8$을 얻고, $\dot\theta$가 일정할 때 P와 Q의 수평 가속도는 서로 상쇄된다.

흔한 실수

- 중심을 (a, a)에 두거나 중심이 움직인다는 사실 자체를 잊는 것. $a\theta$ 항이 바로 구르는 운동이 기여하는 부분이다.
- P의 위치에서 $\sin\theta$의 부호를 틀리는 것. P가 속도 0으로 출발하는지 확인하라.
- $\dot\theta$의 부호가 왜 바뀔 수 없는지 설명하지 않은 채, 운동에너지가 일정하다는 것만으로 속력이 일정하다고 결론짓는 것.

STEP 너머

이것은 계의 전체 운동량이 외력에 의해서만 변한다는 일반적인 사실의 두 입자 예이다. 내력(internal force)(여기서는 고리가 전달하는 힘)은 쌍으로 상쇄된다. 검산에서 본 운동에너지의 분해는 쾨니히(König)의 정리로, 운동에너지는 질량중심의 운동에너지와 질량중심에 대한 상대 운동의 운동에너지의 합과 같다는 것이며, 이는 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구르는 운동과 이러한 개념들을 주의 깊게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.