풀이

STEP I 2008, 문제 8

순수수학 • 클레로 미분방정식

> **STEP I 2008, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q8

핵심 아이디어

두 방정식 모두 y'은 포함하지만 y''은 포함하지 않으며, 변수를 분리하거나 바로 적분할 수 있는 꼴도 아니다. 한 번 더 미분하는 것이 요령이다. 그러면 y'만 있는 항들이 소거되고, 남은 식은 y''을 한 인수로 갖도록 인수분해(factorise)된다. 각 인수가 하나의 경우를 주며, 각 경우에 적분하는 대신 **원래** 방정식에 다시 대입하면 임의상수(arbitrary constant)가 저절로 결정된다.

풀이

풀이 전체에서 $p = y'$로 쓰므로 $p' = y''$이다.

소문항 (i)

xp에 곱의 미분법(product rule)을 써서 $p^2 - xp + y = 0$을 x에 대하여 미분하면

$$2p\,y'' - (p + x\,y'') + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''\,(2p - x) = 0.$$

두 p 항이 소거되므로, 각 점에서 $y'' = 0$ 또는 $2y' = x$이다. 이것이 보이려던 것이다.

경우 $y'' = 0$. 이때 y'은 상수 m이고 $y = mx + c$이다. 이를 $(*)$에 대입하면

$$m^2 - xm + (mx + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -m^2.$$

따라서 곡선은 직선 $y = mx - m^2$이다.

경우 $2y' = x$. $p = \frac{1}{2}x$를 $(*)$에 대입하면

$$\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = x^2.$$

생각해 보기 그냥 $y' = \frac{1}{2}x$를 적분하여 $y = \frac{1}{4}x^2 + k$를 얻으면 왜 안 될까?

그렇게 할 수도 있지만, $(*)$를 미분하는 과정에서 정보가 버려졌다. $y = \frac{1}{4}x^2 + k$ 꼴의 함수는 모두 $2y' = x$를 만족하지만, $(*)$ 자체를 만족하는 것은 $k = 0$뿐이다(예를 들어 $k = 1$이면 $x = 0$에서 $0 - 0 + 1 \neq 0$이다). $(*)$에 곧바로 다시 대입하면 모든 정보를 한꺼번에 사용하므로 상수가 바로 결정된다. 첫 번째 경우에 $c = -m^2$인 이유도 같은 설명으로 이해된다.

따라서 곡선은 $c = -m^2$인 직선 $y = mx + c$이거나 포물선(parabola) $4y = x^2$이다.

두 답은 서로 연결되어 있다. 직선 $y = mx - m^2$은 $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$, 즉 $(x - 2m)^2 = 0$인 곳에서 $4y = x^2$과 만나므로, 각 직선은 점 $(2m, m^2)$에서 포물선에 접하는 접선(tangent)이다. 포물선은 이 직선족의 **포락선**(envelope)이다.

소문항 (ii)

$(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$을 x에 대하여 미분하면

$$2xp^2 + 2(x^2 - 1)p\,y'' - 2yp - 2xp^2 - 2xy\,y'' + 2yp = 0.$$

y''이 없는 항들은 짝지어 소거되고, 다음이 남는다.

$$2y''[(x^2 - 1)p - xy] = 0.$$

경우 $y'' = 0$. 이때 $y = mx + c$이다. 방정식을

$$(y - xp)^2 = 1 + p^2,$$

로 변형할 수 있음을 알아차리면 도움이 된다. 실제로 $(y - xp)^2 - p^2 - 1 = y^2 - 2xyp + (x^2 - 1)p^2 - 1$이기 때문이다. 직선에 대해서는 $y - xp = c$이고 $p = m$이므로

$$c^2 = 1 + m^2, \qquad \text{즉,} \qquad y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

경우 $(x^2 - 1)p = xy$. $x^2 \neq 1$인 곳에서는 $p = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$이므로

$$y - xp = y - \frac{x^2 y}{x^2 - 1} = \frac{-y}{x^2 - 1}.$$

이를 $(y - xp)^2 = 1 + p^2$에 대입하고 $(x^2 - 1)^2$을 곱하면

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2 - 1)^2 + x^2 y^2 \\ y^2(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 \\ y^2 &= 1 - x^2, \end{aligned}$$

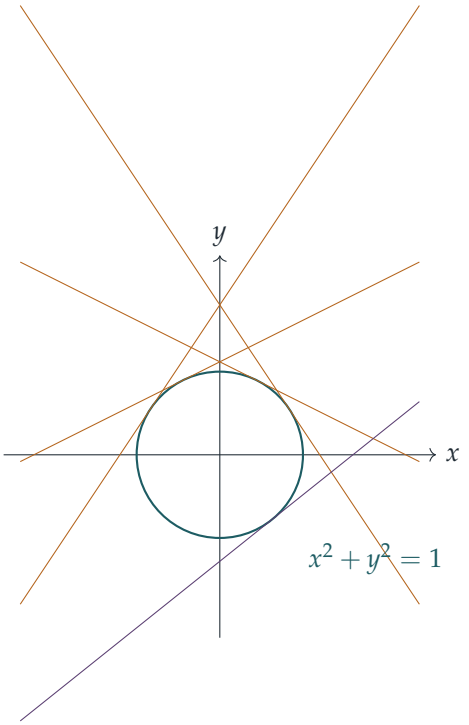
이다. 마지막 단계에서는 $1-x^2 \neq 0$으로 나누었다. 따라서 곡선은 원 $x^2+y^2=1$이다. ($x=\pm 1$에서는 조건 $(x^2-1)p=xy$에 의해 $y=0$이어야 하므로 점 $(\pm 1, 0)$을 얻는데, 이 점들도 같은 원 위에 있다.)

역으로 이 원은 실제로 방정식을 만족한다. 원 위에서 $p=-x/y$이므로 $y-xp=(y^2+x^2)/y=1/y$이고 $1+p^2=(x^2+y^2)/y^2=1/y^2$이 되어 두 식이 일치한다.

따라서 곡선은 $c^2=1+m^2$인 직선 $y=mx+c$이거나 단위원(unit circle) $x^2+y^2=1$이다.

? **생각해 보기** 직선 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$은 원과 어떤 관계가 있을까?

원점에서 $y=mx+c$까지의 거리는 $|c|/\sqrt{1+m^2}$이고, 여기서는 정확히 1이다. 따라서 이 직선들은 바로 단위원의 (수직이 아닌) 접선들이며, 이는 (i)의 직선들이 포물선의 접선이었던 것과 똑같다.



검산

- (i)에서 $m=1$로 두자. $y=x-1$은 $p=1$이고, $1-x+x-1=0$이다. 이 직선은 $(2,1)$에서 $4y=x^2$에 접한다.
- (ii)에서 원 위의 점 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$에서는 $p=-\frac{3}{4}$이다. 그러면 $(x^2-1)p^2-2xyp+y^2-1=$

$-\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{16}+\frac{18}{25}+\frac{16}{25}-1=0$이다.

- 수치적으로, 임의의 삼차곡선들을 따라 두 도함수 인수분해를 모두 확인했고, 직선, 포물선, 원은 잔차가 (10^{-13} 이내로) 0인 반면 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 $x^2+y^2=4$는 그렇지 않음을 확인했다.

흔한 실수

- $y'=\frac{1}{2}x$나 $y''=0$을 적분하고 임의상수를 그대로 남겨 두는 것. 상수는 원래 방정식으로 결정해야 한다.
- $c=\pm\sqrt{1+m^2}$에서 $\pm$을 빠뜨리는 것. 각 기울기(gradient)마다 평행한 접선이 두 개 있다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **클레로 방정식**(Clairaut equation) $y=xp-f(p)$이다. 이 방정식의 일반해(general solution)는 직선족 $y=mx-f(m)$이고, 그 밖에 이 직선족의 포락선인 **특이해**(singular solution)도 갖는데, 특이해는 상수를 어떻게 선택해도 얻어지지 않는다. 소문항 (ii)도 같은 현상으로, $y=xp\pm\sqrt{1+p^2}$이며 원이 포락선이다. 특이해는 일계(first-order) 방정식이 각 점을 지나는 해를 유일하게 가질 필요가 없음을 보여 준다. 언제 유일성이 성립하는지는 처음 배우는 상미분방정식(ODE) 강좌에서 다루는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorems)의 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이에 대해 읽어 보기 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.