풀이

STEP I 2008, 문제 7

순수수학 • 회전과 거리

> **STEP I 2008, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q7

핵심 아이디어

원점을 지나는 직선까지의 수직 거리(perpendicular distance)는 그 직선이 x축 위에 놓이도록 평면을 회전(rotation)시키면 쉽게 구할 수 있다. 이때 거리는 새로운 y좌표의 크기일 뿐이다. 첫 번째 부분의 회전 공식이 세 변 가운데 두 변에 대해 바로 이 일을 해 준다. 마지막 부분의 요령은 절댓값(modulus) 기호를 떼어 내는 것이다. 세 개의 **부호 있는** 거리(signed distance)의 합은 언제나 같은 상수이고, 절댓값을 씌우면 합은 커질 수만 있다.

풀이

회전 공식

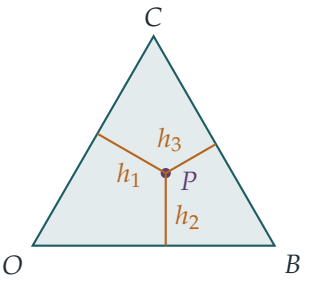
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 놓는다. 여기서 $r = OP$이고 θ는 양의 x축에서 OP까지의 각이다. OP를 시계 방향으로 60° 회전시키면 r은 그대로이고 각은 $\theta - 60^\circ$로 바뀌므로, 새로운 y좌표는

$$\begin{aligned} r\sin(\theta - 60^\circ) &= r\sin\theta\cos 60^\circ - r\cos\theta\sin 60^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x = \tfrac{1}{2}(y - \sqrt{3}\,x), \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 시계 반대 방향으로 회전시키면 각은 $\theta + 60^\circ$가 되고, $\sin 60^\circ$의 부호만 바꾸어 같은 방식으로 전개하면 새로운 y좌표는

$$\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x).$$

세 거리



h_1. 직선 OC는 x축과 $60°$의 각을 이룬다. 그림 전체를 O를 중심으로 시계 방향으로 $60°$ 회전시키면 OC가 x축 위로 옮겨지고 거리는 보존된다. 회전된 그림에서 P에서 x축까지의 거리는 새로운 y좌표의 절댓값이므로

$$h_1 = \tfrac{1}{2}|\, y - \sqrt{3}\, x\,|.$$

h_2. 직선 OB는 x축이므로 $h_2 = |y|$이다.

h_3. 이번에는 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 $60°$ 회전시킨다. 이 회전은 $B = (1,0)$을 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$으로 보내고, (각 $60°$에 있는) C를 각 $120°$에 있는 점, 즉 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$으로 보낸다. 따라서 직선 BC는 수평선 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$이 되고, P의 y좌표는 $\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}\, x)$가 된다. 그러므로

$$h_3 = \left|\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\, x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right| = \tfrac{1}{2}|\, \sqrt{3}\, x + y - \sqrt{3}\,|.$$

(같은 방법으로, BC의 방정식은 $\sqrt{3}\, x + y = \sqrt{3}$이고 $\sqrt{3+1} = 2$이므로 일반적인 점과 직선 사이의 거리 공식으로도 같은 답을 얻는다.)

마지막 부분

부호 있는 양

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\, x - y), \qquad s_2 = y, \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\, x - y),$$

를 정의하면 $i = 1, 2, 3$에 대해 $h_i = |s_i|$이다. 이들을 더하면

$$s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - \tfrac{1}{2}y + y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

이고, 이는 **모든** 점 (x, y)에 대해 성립한다.

생각해 보기 s_1, s_2, s_3의 부호는 삼각형과 어떤 관계가 있는가?

각 s_i는 삼각형의 한 변 위에서 0이 되는 일차식이다. 내부에 있는 무게중심(centroid) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$을 대입해 보면 $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{6}\sqrt{3} > 0$이다. 따라서 $s_2 \geq 0$은 OB를 기준으로

C가 있는 쪽이고, $s_1 \geq 0$은 OC를 기준으로 B가 있는 쪽이며, $s_3 \geq 0$은 BC를 기준으로 O가 있는 쪽이다. 경계를 포함한 삼각형 OBC는 정확히 이 세 반평면(half-plane)의 교집합이므로

$$P \text{ 가 다음 삼각형의 경계 또는 내부에 있다: } OBC \iff s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

이제 임의의 실수 s에 대해 $|s| \geq s$이고, 등호는 $s \geq 0$일 때만 성립한다. 따라서

$$h_1 + h_2 + h_3 = |s_1| + |s_2| + |s_3| \ \geq\ s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

이고, 등호는 모든 i에 대해 $|s_i| = s_i$일 때, 즉 세 s_i가 모두 음이 아닐 때만 성립한다. 앞 문단에 의해 이는 정확히 P가 삼각형 OBC의 경계 또는 내부에 있을 때이다. 이로써 양방향이 한꺼번에 증명된다.

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \iff P \text{ 가 다음 삼각형의 경계 또는 내부에 있다: } OBC.$$

또한 삼각형 바깥에서는 합이 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$보다 엄밀히 크다는 점도 알 수 있다.

검산

- 꼭짓점, 예를 들어 $P = B = (1, 0)$에서: $h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$이고 합은 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$이다. 맞다.
- 무게중심에서는 각 거리가 $\frac{1}{6}\sqrt{3}$이고, 세 개를 더하면 삼각형의 높이인 $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660$이 된다.
- 바깥의 점 $P = (2, 0)$에서: $h_1 = \sqrt{3}$, $h_2 = 0$, $h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$이고 합은 $\frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{3}$이다.
- 무작위로 고른 10^5개의 점에서 세 공식을 점과 직선 사이의 거리를 직접 계산한 값과 비교했고(10^{-15}까지 일치), 변 위의 점을 다수 포함한 2×10^5개의 점에서 "필요충분조건"을 검사했는데 예외는 없었다.

흔한 실수

- 회전의 부호를 틀리는 것: 시계 방향은 각이 **줄어든다**는 뜻이므로 $\theta - 60^\circ$가 된다.
- 한 방향만 증명하는 것. 삼각형 내부에서 합이 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$임을 확인하는 것만으로는 충분하지 않다. 바깥에서는 합이 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$이 **아님**도 보여야 한다. 부등식 $|s| \geq s$가 두 가지를 한꺼번에 해결해 준다.
- h_1, h_2, h_3에서 절댓값 기호를 빠뜨리는 것: 거리는 절대 음수가 아니다.

STEP 너머

이것은 비비아니 정리(Viviani's theorem)이다. 정삼각형에서 내부의 한 점에서 세 변까지의 거리의 합은 높이와 같다. 부호 있는 거리 s_1, s_2, s_3은 (상수배를 제외하면) P의 **무게중심 좌표**(barycentric coordinates) 또는 **삼선 좌표**(trilinear coordinates)이다. 이 좌표들의 합은 언제나 상수이고, 정확히 삼각형 내부에서 모두 음이 아니다. 이들은 기하학, 컴퓨터 그래픽스, 볼록 해석(convex analysis)의 표준적인 도구이다. 회전 공식은 2×2 회전 행렬(rotation matrix)의 두 번째 행이며, 회전을 선형 사상(linear map)으로 이해하려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.