풀이

STEP I 2008, 문제 6

순수수학 • 역함수와 넓이

> **STEP I 2008, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q6

핵심 아이디어

역함수(inverse function)의 그래프는 원래 함수의 그래프를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동(reflection)한 것이다. 따라서 g를 y에 대하여 적분한 값은 곡선 $y = f(x)$와 y축 사이의 넓이를 **옆으로** 잰 것이다. 위끝 k는 우연히 정해진 값이 아니다. 이 값은 정확히 $f(\frac{1}{2})$이다. 이 사실을 알아차리면 두 넓이가 맞물려 하나의 직사각형을 채운다.

풀이

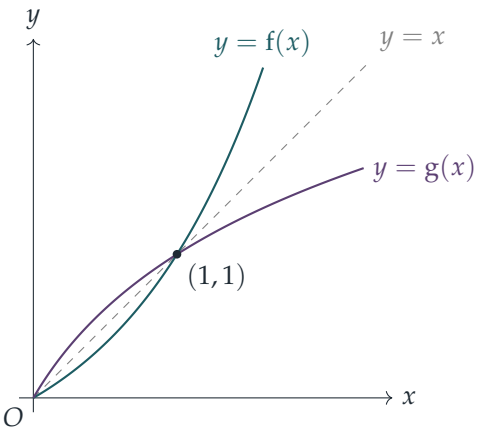
그래프 그리기

함수 f는 증가함수이고 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$이다. $f''(x) = e^x/(e-1) > 0$이므로 아래로 볼록(convex)하고, 원점에서의 기울기(gradient)는 $f'(0) = 1/(e-1) \approx 0.58 < 1$이다. 따라서 $0 < x < 1$에서 곡선은 직선 $y = x$보다 아래에 있고, $(1,1)$에서 그 직선과 만난 뒤 지수적으로 증가한다.

g를 구하기 위해 $y = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$을 x에 대하여 풀면

$$g(x) = \ln(1 + (e-1)x), \qquad x \geq 0,$$

이다. 이는 f의 치역이 $[0, \infty)$이기 때문이다. 이 함수의 그래프는 $y = f(x)$를 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것이다. 즉 기울기 $e - 1 \approx 1.72$로 $(0,0)$을 지나고, 위로 볼록(concave)하며, $(1,1)$에서 $y = x$와 만난 뒤 로그함수처럼 천천히 증가한다.



첫 번째 적분

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\sqrt{\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2} - 1\Big) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}}{\mathrm{e}-1}.$$

두 번째 적분

먼저 다음을 관찰하자.

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = k,$$

여기서 제곱의 차(difference of two squares) $\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 - 1$을 이용하였다. 같은 말로 $\mathrm{g}(k) = \frac{1}{2}$이고, $1 + (\mathrm{e}-1)k = 1 + (\sqrt{\mathrm{e}}-1) = \sqrt{\mathrm{e}}$이다.

> **생각해 보기** $\ln(1+(\mathrm{e}-1)x)$는 어떻게 적분할까?

$u = 1 + (\mathrm{e}-1)x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(\mathrm{e}-1)$이고, 적분 구간의 끝은 $u = 1$과 $u = \sqrt{\mathrm{e}}$가 된다. 그다음 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u$($\ln u$와 1의 곱으로 보고 부분적분(integration by parts)한 결과)를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} - (0-1)\Big) = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$를 이용하였다.

더하기

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{k} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)},$$

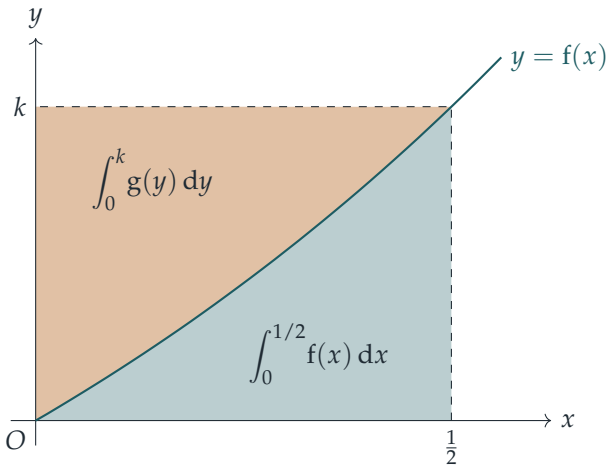
이므로 증명하려던 식이 성립한다.

결과 해석하기

답은 $\frac{1}{2} \times k$이고, 이는 두 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(\frac{1}{2},k)$인 직사각형의 넓이이다. 그 이유는 다음과 같다.

? **생각해 보기** $\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$는 f의 그래프에서 어디에 나타나는가?

$y = x$에 대한 대칭이동은 넓이를 보존한다. $0 \le x \le k$에서 $y = \mathrm{g}(x)$ 아래의 영역은 대칭이동하면 $0 \le y \le k$에서 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$와 y축 사이의 영역이 된다. 다시 말해 이 값은 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$를 따라 잰 $\int_0^k x\,\mathrm{d}y$, 곧 곡선 **왼쪽**의 넓이이다. $\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = k$이므로 곡선은 직사각형의 꼭짓점 $(0,0)$에서 꼭짓점 $(\frac{1}{2},k)$까지 이어지며 직사각형을 두 조각으로 나눈다. 하나는 곡선 아래의 넓이(첫 번째 적분, 청록색)이고, 다른 하나는 곡선 왼쪽의 넓이(두 번째 적분, 호박색)이다.



따라서 두 적분을 합하면 직사각형 전체가 되고, 그 넓이는 $\frac{1}{2}k = \dfrac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$이다. 같은 그림으로부터 $\mathrm{f}(0) = 0$인 증가함수에 대하여 다음 일반적인 사실을 얻는다.

$$\int_0^{a} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = a\,\mathrm{f}(a).$$

검산

수치적으로 첫 번째 적분은 약 0.08655, 두 번째 적분은 약 0.10222이다. 각각에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 정확한 값과 소수점 아래 열두 자리까지 일치하고, 두 값의 합 0.18877은 $1/(2(\sqrt{\mathrm{e}}+1))$과 같다. 그래프가 맞는지 확인하는 차원에서 보면, 두 조각은 모두 양수이고 청록색 조각이 더 작은데, 이는 당연하다. 아래로 볼록한 곡선이 직사각형의 대각선보다 아래로 처져 있기 때문이다.

흔한 실수

- $k = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$임을 알아차리지 못해서 $1 + (\mathrm{e}-1)k = \sqrt{\mathrm{e}}$로 간단히 하는 과정을 놓친다.
- 원점 근처에서 f를 $y = x$보다 위에 그린다. 그곳에서의 기울기는 $1/(\mathrm{e}-1) < 1$이다.
- 그림에서 $y = \mathrm{g}(x)$ 아래의 넓이를 별도의 그림에 색칠하고, 그것이 $y = \mathrm{f}(x)$ 옆의 영역과 어떤 관계인지 설명하지 않는다. 핵심은 대칭이동이 한 영역을 다른 영역으로 옮긴다는 점이다.

STEP 너머

항등식 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1} = a\,\mathrm{f}(a)$는 **영 부등식**(Young's inequality)에서 등호가 성립하는 경우이다. 즉 임의의 $b \geq 0$에 대하여 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1} \geq ab$이다. $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$로 두면 $1/p + 1/q = 1$일 때 $ab \leq a^p/p + b^q/q$를 얻는데, 이는 해석학에서 휠더 부등식(Hölder's inequality)의 출발점이다. 이와 같은 적분을 어떻게 엄밀하게 다루는지 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.