풀이

STEP I 2008, 문제 5

순수수학 • 다항식의 상계와 하계

> **STEP I 2008, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q5

핵심 아이디어

$n = 1$일 때 다항식(polynomial)은 직선이고, 구간 양 끝에서의 값은 서로 묶여 있다. 두 값의 차가 정확히 2이므로 둘 다 작을 수는 없다. 소문항 (ii)의 요령은 최고차항의 계수(leading coefficient)로 나누어 체비쇼프(Chebyshev)의 정리를 곡선 자체에 적용할 수 있게 만드는 것이다. 그러면 정리에 의해 $[-1, 1]$의 어딘가에서 $|y|$가 커야 하는 반면, 양 끝점에서의 값은 작다. 양 끝점의 값보다 더 높이 올라가는(또는 둘 다보다 더 낮게 내려가는) 곡선은 그 사이 어딘가에서 방향을 바꾸어야 한다.

풀이

소문항 (i)

$n = 1$인 경우. 이때 $\mathrm{p}(x) = x + a_0$이고, $M \geq 2^0 = 1$임을 보여야 한다. M은 $[-1, 1]$의 임의의 점에서의 $|\mathrm{p}|$의 값 이상이므로, 특히 양 끝점에서의 값 이상이다.

$$M \geq |\mathrm{p}(1)| = |1 + a_0| \quad \text{그리고} \quad M \geq |\mathrm{p}(-1)| = |a_0 - 1|.$$

두 식을 더하고 삼각부등식(triangle inequality) $|u| + |v| \geq |u - v|$를 쓰면

$$2M \geq |1 + a_0| + |a_0 - 1| \geq |(1 + a_0) - (a_0 - 1)| = 2,$$

이므로 $M \geq 1 = 2^{1-n}$이고, 따라서 $n = 1$일 때 정리가 증명된다. ($\mathrm{p}(x) = x$일 때 등호가 성립하므로 이 하한은 더 개선할 수 없다.)

(a) $\mathrm{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$이고 $|x| \leq 1$이면 $0 \leq x^2 \leq 1$이므로 $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{p}(x) \leq \frac{1}{2}$이다. 값 $\frac{1}{2}$는 $x = \pm 1$에서 (그리고 $-\frac{1}{2}$는 $x = 0$에서) 얻어지므로

$$M = \tfrac{1}{2} = 2^{1-2}.$$

정리가 등호와 함께 성립한다.

(b) $\mathrm{p}(x) = x^3 - x$에 대해서는 $M \geq 2^{1-3} = \frac{1}{4}$임을 보여야 한다. $|\mathrm{p}| \geq \frac{1}{4}$인 점을 하나만 찾으면 충분하다. 정류점(stationary point)은 $3x^2 - 1 = 0$인 곳, 즉 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이고, 둘 다 $[-1, 1]$에 속하며

$$\mathrm{p}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$\mathrm{p}(\pm 1) = 0$이므로 이것이 실제로 최댓값이다. 즉 $M = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$이다. 계산기 없이 $\frac{1}{4}$와 비교하려면 양변을 제곱한다.

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

따라서 $M > \frac{1}{4}$이고 정리가 성립한다(이번에는 여유 있게).

소문항 (ii)

$f(x) = 64x^5 + 25x^4 - 66x^3 - 24x^2 + 3x + 1$이라 하자. 체비쇼프의 정리는 최고차항의 계수가 1인 다항식에 관한 것이므로, 다음 다항식에 정리를 적용한다.

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{64} f(x) = x^5 + \tfrac{25}{64}x^4 - \tfrac{66}{64}x^3 - \tfrac{24}{64}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{1}{64},$$

이것은 $n = 5$인 요구된 꼴이다. 정리에 의해 $\max_{|x|\leq 1} |\mathrm{p}(x)| \geq 2^{-4} = \frac{1}{16}$이고, 양변에 64를 곱하면

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x)| \geq 4.$$

따라서 $|f(x_0)| \geq 4$인 $x_0 \in [-1, 1]$이 존재한다.

이제 양 끝점을 살펴보자.

$$f(1) = 64 + 25 - 66 - 24 + 3 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = -64 + 25 + 66 - 24 - 3 + 1 = 1.$$

두 값 모두 절댓값이 4보다 작으므로 x_0은 끝점이 아니다. 즉 $-1 < x_0 < 1$이다.

> **생각해 보기** $|f|$가 구간 안쪽에서 커진다는 것은 안다. 왜 이로부터 전환점이 반드시 생기는가?

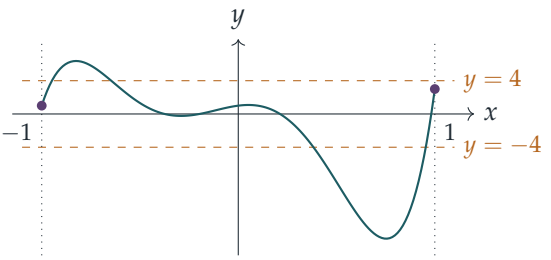
두 경우로 나눈다.

- $f(x_0) \geq 4$이면 $f(x_0)$은 $f(-1) = 1$과 $f(1) = 3$보다 모두 크다. 연속함수(continuous function) f는 닫힌구간(closed interval) $[-1, 1]$에서 최댓값을 가진다. 이 값은 $f(x_0) \geq 4$ 이상이므로 어느 끝점에서도 얻어지지 않는다. 따라서 최댓값은 구간 내부의 점에서 얻어지고, 그 점은 f의 극댓값(local maximum)이다.

- $f(x_0) \le -4$이면 $f(x_0)$은 두 끝점의 값보다 모두 작고, 같은 방법으로 $[-1,1]$에서 f의 최솟값은 내부의 점에서 얻어지며, 그 점은 극솟값(local minimum)이다.

어느 경우든 f는 $(-1,1)$의 내부에서 극댓값 또는 극솟값을 가진다. 그 점에서 $f' = 0$이고, f는 상수가 아닌 다항식이므로 f'의 영점은 유한개뿐이다. 따라서 그 점의 바로 왼쪽에서 f'의 부호는 일정하고, 바로 오른쪽에서도 일정하다. 그 점이 극댓값 또는 극솟값이므로 두 부호는 반대여야 하고, 따라서 그 점은 진짜 전환점(turning point)이다. 그러므로 곡선은 $-1 \le x \le 1$에서 적어도 하나의 전환점을 가진다.

사차방정식(quartic) $f'(x) = 0$을 한 번도 풀 필요가 없었다는 점에 주목하자. 바로 그것이 이 문제의 핵심이다.



그림은 $[-1,1]$에서의 곡선을 보여 준다. 두 끝점의 값은 모두 점선 $y = \pm 4$ 사이에 있지만, 곡선은 그 띠 밖으로 나간다. 실제로 곡선은 구간 안에 전환점을 네 개 가지며, 가장 깊은 것은 $x \approx 0.75$ 근처에서 $y \approx -15$이다.

검산

- $n = 1$일 때 a_0에 몇 가지 값을 넣어 보면 $\max(|1 + a_0|, |1 - a_0|)$는 결코 1보다 작지 않고, $a_0 = 0$일 때만 1과 같다.
- (b)에서 $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$로, 0.25보다 넉넉히 크다. 촘촘한 격자에서 $x^3 - x$의 값을 조사하면 이것이 $|x^3 - x|$의 최댓값임을 확인할 수 있다.
- (ii)에서 $[-1,1]$ 위의 f를 수치적으로 조사하면 $\max|f| \approx 15.0$ (이때 $x \approx 0.753$이고 $f \approx -15.0$)으로, 보장된 값 4보다 훨씬 크다. 또한 f'의 부호가 $x \approx -0.825, -0.292, 0.052, 0.753$에서 바뀐다는 것도 알 수 있다.

흔한 실수

- 정리를 f에 바로 적용하는 것. f의 최고차항의 계수는 1이 아니라 64이므로 먼저 64로 나누어야 한다. 그러면 하한은 $64 \cdot 2^{-4} = 4$가 된다.

- "어딘가에서 $|f| \geq 4$"에서 멈추는 것. 그것만으로는 전환점이 생기지 않는다. 극값이 구간 내부에서 얻어진다는 것을 보이려면 끝점의 값 1과 3이 필요하다.
- (b)에서 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$와 $\frac{1}{4}$를 부주의하게 비교하는 것. 두 양수를 제곱하면 비교가 정확해진다.

STEP 너머

체비쇼프 정리에서 등호는 정확히 $2^{1-n}T_n(x)$일 때 성립한다. 여기서 T_n은 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$로 정의되는 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial)이다. 소문항 (a)는 $\frac{1}{2}T_2$이고, $n = 1$인 경우는 $T_1(x) = x$이다. 이 다항식들은 근사 이론(approximation theory)의 출발점이다. 이 다항식들은 보간(interpolation)이 등간격 점보다 체비쇼프 점(Chebyshev nodes)에서 가장 잘 작동하는 이유를 설명해 준다. 소문항 (ii)의 논증은 최대·최소 정리(extreme value theorem, 닫힌구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가진다)를 사용하는데, 이 정리는 대학 첫 해석학(analysis) 과목에서 엄밀하게 증명된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 읽어 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.