풀이

STEP I 2008, 문제 4

순수수학 • 볼록함수

> **STEP I 2008, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q4

핵심 아이디어

두 함수는 모두 $\mathrm{e}^{h(x)}$ 꼴의 지수함수(exponential)이고, 두 번 미분하면 $(h'' + (h')^2)\mathrm{e}^h$가 된다. 지수함수 인수는 항상 양수이므로 볼록성(convexity)은 $h'' + (h')^2$의 부호, 즉 순수한 삼각함수 부등식으로 귀결된다. (i)에서는 이 부등식이 바로 그리라고 한 두 곡선을 비교하는 것임이 드러난다. (ii)에서는 이 부등식이 $\sin 2x$와 $\sin 2\alpha$의 비교로 단순해진다.

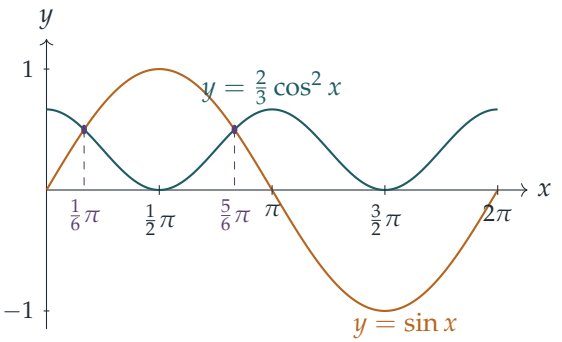
풀이

소문항 (i)

그래프 그리기. 곡선 $y = \frac{2}{3}\cos^2 x$는 0과 $\frac{2}{3}$ 사이에 놓인다. 이 곡선은 $x = 0, \pi, 2\pi$에서 $\frac{2}{3}$이고 $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$에서 축에 접하며, 주기(period)는 π이다. 곡선 $y = \sin x$는 익숙한 사인 곡선이다. 두 곡선이 만나는 점을 찾기 위해 $s = \sin x$로 놓고 $\cos^2 x = 1 - s^2$를 대입하면

$$\tfrac{2}{3}(1 - s^2) = s \iff 2s^2 + 3s - 2 = 0 \iff (2s - 1)(s + 2) = 0.$$

$s = -2$는 불가능하므로 $\sin x = \frac{1}{2}$이고, 따라서 두 곡선은 $x = \frac{1}{6}\pi$와 $x = \frac{5}{6}\pi$에서만 만난다. $(\pi, 2\pi)$에서는 사인 곡선이 음수이고 다른 곡선은 음이 아니므로 그 구간에서는 만나지 않는다.



f의 볼록성. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sin x}$일 때 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x\, f(x)$이고, 이어서 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{2}{3}\sin x\, f(x) + \tfrac{2}{3}\cos x\, f'(x) \\ &= f(x)\left(\tfrac{4}{9}\cos^2 x - \tfrac{2}{3}\sin x\right) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x)\left(\tfrac{2}{3}\cos^2 x - \sin x\right). \end{aligned}$$

생각해 보기 왜 괄호 안의 식만 보면 모든 것이 결정되는가?

$f(x)$는 지수함수이므로 항상 양수이다. 따라서 $f''(x) \geq 0$인 것은 정확히 $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$일 때이다. 다시 말해, f는 정확히 청록색 곡선이 호박색 곡선과 같거나 그보다 위에 있는 곳에서 볼록하다. 문제에서 그래프를 먼저 그리라고 한 이유가 바로 이것이다.

그래프와 앞에서 구한 교점으로부터, $0 < x \leq \frac{1}{6}\pi$와 $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$에서 $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$이다. $\frac{1}{6}\pi$와 $\frac{5}{6}\pi$ 사이에서는 사인 곡선이 위에 있다(예를 들어 $x = \frac{1}{2}\pi$에서 두 값은 0과 1이다). 따라서 f가 볼록인 구간은

$$0 < x \leq \tfrac{1}{6}\pi \qquad \text{그리고} \qquad \tfrac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi,$$

이며, 이보다 더 큰 구간에서는 볼록하지 않다. ($f'' = 0$인 끝점 $\frac{1}{6}\pi$와 $\frac{5}{6}\pi$를 포함할지는 취향의 문제이다.)

소문항 (ii)

$g(x) = \mathrm{e}^{-k\tan x}$이면 $g'(x) = -k\sec^2 x\, g(x)$이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$와 곱의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2k\sec^2 x\tan x\, g(x) - k\sec^2 x\, g'(x) \\ &= g(x)\left(k^2\sec^4 x - 2k\sec^2 x\tan x\right) \\ &= k\sec^2 x\, g(x)\left(k\sec^2 x - 2\tan x\right). \end{aligned}$$

여기서 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $k = \sin 2\alpha > 0$이고, $\sec^2 x > 0$, $g(x) > 0$이다. 따라서 $g''(x) \geq 0$인 것은 정확히 $k\sec^2 x \geq 2\tan x$일 때이다. 양변에 $\cos^2 x > 0$을 곱하면 이 조건은 다음과 같이 된다.

$$k \geq 2\tan x \cos^2 x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

따라서 g가 볼록인 곳은 정확히 다음 조건을 만족하는 곳이다.

$$\sin 2x \leq \sin 2\alpha.$$

생각해 보기 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$일 때 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$인 곳은 어디인가?

x가 $(0, \frac{1}{2}\pi)$를 움직이면 $2x$는 $(0, \pi)$를 움직인다. 이 구간에서 sin은 $\frac{1}{2}\pi$까지 증가한 뒤 감소하며, $\frac{1}{2}\pi$에 대해 대칭이다. 값 $\sin 2\alpha (0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi)$는 $2x = 2\alpha$와 $2x = \pi - 2\alpha$에서 나타난다. 따라서 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$인 것은 정확히 $2x \leq 2\alpha$ 또는 $2x \geq \pi - 2\alpha$일 때이다. 즉 다음과 같다.

$$0 < x \leq \alpha \qquad \text{또는} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \leq x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

특히 $0 < x < \alpha$이면 $0 < 2x < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$이고 이 범위에서 sin은 증가하므로 $\sin 2x < \sin 2\alpha = k$, 따라서 $g''(x) > 0$이다. 그러므로 요구한 대로 g는 $0 < x < \alpha$에서 볼록하다.

다른 하나의 구간은 다음과 같다.

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

$\alpha < \frac{1}{4}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi - \alpha > \frac{1}{4}\pi > \alpha$이고, 따라서 이 구간은 첫 번째 구간과 실제로 다르다. 그 사이 구간 $\alpha < x < \frac{1}{2}\pi - \alpha$에서 g는 볼록하지 않다.

검산

- $x = \frac{1}{6}\pi$에서 $\frac{2}{3}\cos^2 x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \sin x$이므로 그 점에서 $f'' = 0$이다. 경계점이라면 당연히 그래야 한다.
- (ii)에서 $\sin 2x$는 $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$에 대해 변하지 않으므로 문제는 이 변환에 대해 대칭이다. 두 번째 구간이 첫 번째 구간과 거울상인 이유가 이것이다.
- 수치적으로 $\alpha = 0.5 (k \approx 0.841)$로 놓고 유한차분(finite difference)으로 g의 이계도함수(second derivative)를 계산하면 $x = 0.3$과 $x = 1.3$에서 양수이고 $x = 0.8$에서 음수이다. $\frac{1}{2}\pi - \alpha \approx 1.071$이므로 이는 구한 구간과 일치한다. 무작위로 고른 많은 α와 x로 컴퓨터를 이용해 확인한 결과도 두 소문항 모두와 일치했다.

흔한 실수

- $e^{h(x)}$를 두 번 미분할 때 $(h')^2$ 항을 빠뜨리는 실수. 이계도함수는 단순히 $h''e^h$가 아니다.
- (i)에서 $(\pi, 2\pi)$ 전체를 놓치는 실수. 그 구간에서는 $\sin x < 0 \leq \frac{2}{3}\cos^2 x$이므로 f는 $\frac{5}{6}\pi$부터 2π까지 줄곧 볼록하다.
- $\sin 2x \leq \sin 2\alpha \Rightarrow x \leq \alpha$에서 멈추는 실수. sin은 $(0, \pi)$에서 단조(monotonic)가 아니므로 이렇게 하면 두 번째 구간을 잃게 된다.

STEP 너머

이계도함수 판정법은 볼록성의 한 면에 불과하다. 진짜 정의는 기하학적이다. 즉 모든 현(chord)이 그래프와 같거나 그보다 위에 놓인다는 것이다. 미분가능한(differentiable) 함수에서는 이것이 f'이 증가한다는 것과 동치이며, 이로부터 옌센 부등식(Jensen's inequality)이 나온다. 옌센 부등식은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)과 확률론 및 최적화의 많은 부분의 바탕이 된다. 볼록함수는 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에서 꼼꼼하게 다룬다. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 유형의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.