풀이

STEP I 2008, 문제 3

순수수학 • 재배열을 이용한 부등식

> **STEP I 2008, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q3

핵심 아이디어

부등식 $(*)$는 사실 음이 아닌 두 인수의 곱이 모양을 바꾼 것에 지나지 않는다. 일단 이것을 얻으면, 이후의 모든 부등식은 $(*)$의 양변이 우리가 원하는 양변이 되도록 a, b, c, d를 고르고, 그와 동시에 조건 $c \geq a$와 $d \geq b$가 실제로 성립하는지 확인하는 문제가 된다. 목표로 하는 부등식들이 대칭적(symmetric)이므로 먼저 변수들의 크기 순서를 정해 놓아도 되며, 바로 그 순서가 이 조건들을 보장해 준다.

풀이

$(*)$의 증명

모든 항을 한쪽으로 옮기고 인수분해(factorise)한다.

$$ab + cd - bc - ad = a(b-d) - c(b-d) = (c-a)(d-b).$$

$c \geq a$이고 $d \geq b$이면 두 인수가 모두 음이 아니므로 그 곱도 음이 아니다. 따라서 $ab + cd \geq bc + ad$이고, 등호는 정확히 $c = a$ 또는 $d = b$일 때 성립한다.

소문항 (i)

변수가 두 개인 경우. $x \geq y$라고 하자. $(*)$에서

$$a = y, \quad b = y, \quad c = x, \quad d = x.$$

로 놓는다. 조건 $c \geq a$와 $d \geq b$는 둘 다 $x \geq y$를 뜻하며, 이는 주어진 조건이다. 그러면 $ab + cd = y^2 + x^2$이고 $bc + ad = xy + xy$이므로 $(*)$에서

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

를 얻는다.

변수가 세 개인 경우. 이제 $x \geq z$이고 $y \geq z$라고도 가정하자.

$$a = z, \quad b = z, \quad c = x, \quad d = y.$$

로 놓는다. 여기서 $c \geq a$는 $x \geq z$이고 $d \geq b$는 $y \geq z$이며, 둘 다 주어진 조건이다. 이제 $ab + cd = z^2 + xy$이고 $bc + ad = zx + zy$이므로

$$z^2 + xy \geq xz + yz.$$

이다. 이것을 $x^2 + y^2 \geq 2xy$($x \geq y$이므로 사용할 수 있다)와 더하면

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy \geq 2xy + xz + yz,$$

이고, 양변에서 xy를 빼면

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

를 얻는다. 지금까지는 $x \geq y \geq z$인 경우에만 증명된 것이다.

생각해 보기 $x \geq y \geq z$인 경우에만 증명된 결과로부터 어떻게 모든 x, y, z에 대한 결과를 얻을 수 있을까?

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$의 양변은 모두 대칭적이다. 즉 어느 두 변수를 서로 바꾸어도 각 변은 변하지 않는다. 임의의 실수 x, y, z가 주어지면, 이들을 큰 것부터 차례로 $X \geq Y \geq Z$로 늘어놓는다. 방금 보인 것에 의해 $X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$이다. 그런데 이것은 x, y, z에 대한 부등식과 항의 순서만 다를 뿐 같은 부등식이다. 따라서 이 부등식은 모든 실수 x, y, z에 대하여 성립한다.

(등호가 성립하려면 더한 두 부등식에서 모두 등호가 성립해야 하고, 이로부터 $x = y = z$이어야 한다.)

소문항 (ii)

주어진 식은 어떤 수와 그 역수(reciprocal)의 합으로 이루어진 세 쌍의 합이다.

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t}\right) + \left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$

따라서 임의의 양수 p, q에 대하여 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$임을 보이면 충분하다. 이는 $x^2 + y^2 \geq 2xy$에 대응하는 부등식이다.

식 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$는 p와 q에 대하여 대칭적이므로 $p \geq q > 0$이 되도록 이름을 붙여도 된다. $(*)$에서

$$a = q, \quad b = \frac{1}{p}, \quad c = p, \quad d = \frac{1}{q}.$$

로 놓는다. 그러면 $c \geq a$는 $p \geq q$이고, $d \geq b$는 $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$인데, p와 q가 양수이므로 이 역시 $p \geq q$로부터 나온다. 이제

$$ab + cd = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}, \qquad bc + ad = \frac{p}{p} + \frac{q}{q} = 2,$$

이므로 $(*)$에서 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$를 얻는다.

이것을 쌍 (s,t), (t,r), (r,s)에 적용하고 세 결과를 더하면, 모든 양수 r, s, t에 대하여

$$\frac{s}{t} + \frac{t}{r} + \frac{r}{s} + \frac{t}{s} + \frac{r}{t} + \frac{s}{r} \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

이 되어 증명이 끝난다. 각 쌍에서 두 수가 같아야 하므로, 등호는 정확히 $r = s = t$일 때 성립한다.

검산

- 소문항 (i)에 $x = 3, y = 1, z = -2$를 대입해 보자. 좌변은 14이고 우변은 $3 - 2 - 6 = -5$이다. 세 값을 어떻게 바꾸어 배열해도 양변은 변하지 않으며, 이는 대칭성 논증에서 필요한 성질이다.
- 소문항 (i)의 독립적인 증명: $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$.
- $r = 2, s = 1, t = 1$일 때 소문항 (ii)의 식은 $1 + \frac{1}{2} + 2 + 1 + 2 + \frac{1}{2} = 7 \geq 6$이다. 무작위로 고른 20,000개의 정확한 유리수 경우에 대해 컴퓨터로 모든 단계를 확인한 결과 반례는 없었으며, $r = 1.001, s = 1, t = 0.999$와 같은 값에서는 합이 6보다 아주 조금 크다.

흔한 실수

- $c \geq a$와 $d \geq b$를 확인하지 않고 $(*)$를 사용하는 것. 대입을 잘못하면 부등식의 방향이 반대가 될 수 있다.
- 소문항 (ii)에서 $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$가 양수 조건을 사용한다는 점을 잊는 것. 음수에서는 역수를 취할 때 순서가 같은 방식으로 뒤집히지 않는다.
- 소문항 (i)을 $x \geq y \geq z$인 경우에만 증명하고, 대칭성으로부터 왜 일반적인 경우가 나오는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

부등식 $(*)$는 **재배열 부등식**(rearrangement inequality)의 두 항인 경우이다. 재배열 부등식이란 두 수열이 정렬되어 있을 때, 곱의 합은 같은 순서로 짝지을 때 가장 크고 반대 순서

로 짝지을 때 가장 작다는 것이다. 여기서 다룬 두 결과와 두 항에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)이 모두 이로부터 곧바로 나오며, 이는 체비쇼프(Chebyshev)의 합 부등식과도 밀접한 관련이 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 형식의 부등식 연습 문제가 더 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 이러한 순서 논증이 해석학의 바탕을 어떻게 이루는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.