풀이

STEP I 2008, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2008, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q2

핵심 아이디어

이 치환(substitution)은 제곱근이 간단한 식인 $t - x$가 되도록 고른 것이다. x에 대해 풀어서 복잡한 분수식을 미분하는 대신, 양변을 제곱하여 근호를 없앤 다음 그 결과로 얻은 관계식을 음함수 미분(implicit differentiation)한다. 도함수에는 피적분함수(integrand)의 제곱근을 정확히 약분하는 인수 $t - x$가 들어 있으므로, 적분은 $\int \frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t$로 간단해진다. 마지막 문항은 그 약분과 나눗셈이 언제 정당한지를 묻는 시험이다.

풀이

도함수

$R = \sqrt{x^2 + 2bx + c}$라 두면 $t - x = R$이다. 양변을 제곱하면

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 2bx + c \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2tx - 2bx - c = 0.$$

이 식을 t에 대하여 미분하면(x는 t의 함수이다)

$$2t - 2x - 2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \text{따라서} \qquad (t+b)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t - x.$$

$t + b$로 나누려면 이것이 0이 아니어야 한다. $b^2 < c$이므로

$$x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + (c - b^2) > (x+b)^2,$$

따라서 $R > |x + b|$이고, 그러므로

$$t + b = (x+b) + R > (x+b) + |x+b| \geq 0.$$

즉 모든 x에 대하여 $t+b>0$이고,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t-x}{t+b},$$

이므로 원하는 결과가 성립한다. (제곱한 관계식을 직접 풀 수도 있다. $x=\dfrac{t^2-c}{2(t+b)}$이고, 이것을 미분하면 약간의 계산 끝에 같은 답을 얻는다.)

적분

이차식 $x^2+2bx+c$는 모든 x에 대하여 양수이므로 피적분함수는 어디서나 정의된다. 치환하고 $R=t-x$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t+b}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t=\ln(t+b)+C,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $t+b>0$이므로 절댓값(modulus)은 필요 없다. $R>0$이므로 $t-x=R$을 약분하는 것도 문제없다. 다시 x로 돌아가면

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+b+\sqrt{x^2+2bx+c}\right)+C.$$

미분하여 이를 확인할 수 있다. $x+b+R$의 도함수는 $1+\dfrac{x+b}{R}=\dfrac{R+x+b}{R}$이고, 이것을 $x+b+R$로 나누면 $\dfrac{1}{R}$이 남는다.

$b^2=c$인 경우

이제 $x^2+2bx+c=(x+b)^2$이므로 $\sqrt{x^2+2bx+c}=|x+b|$이고, 피적분함수는 $\dfrac{1}{|x+b|}$이다($x\neq -b$에서 정의된다).

> **?** **생각해 보기** $\sqrt{(x+b)^2}$은 왜 단순히 $x+b$가 아닌가?

제곱근 기호는 음이 아닌 제곱근을 뜻하므로 $\sqrt{(x+b)^2}=|x+b|$이고, 이는 $x+b<0$일 때 $-(x+b)$와 같다. 바로 이 부호가 공식이 살아남는지를 결정한다.

$x+b>0$인 경우: 직접 계산하면

$$\int\frac{1}{x+b}\,\mathrm{d}x=\ln(x+b)+C.$$

공식으로 구하면

$$\ln\left(x+b+(x+b)\right)=\ln 2+\ln(x+b),$$

이고, 이는 직접 구한 답과 상수 $\ln 2$만큼만 다르다. 따라서 이 결과는 여전히 성립한다.

$x+b<0$인 경우: 직접 계산하면

$$\int \frac{1}{-(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(-(x+b)\right)+C = -\ln|x+b|+C.$$

그런데 공식으로 구하면 $\ln\left(x+b+|x+b|\right) = \ln\left((x+b)-(x+b)\right) = \ln 0$이 되어 정의되지 않는다. 따라서 이 경우에는 결과가 성립하지 않는다.

유도 과정의 어디가 무너지는지 살펴볼 만하다. $x+b<0$이면 모든 x에 대하여 $t = x-(x+b) = -b$이다. 즉 t는 상수이므로 새로운 변수로 전혀 쓸 수 없고, $t+b=0$은 바로 우리가 나누었던 양이다. 엄격한 부등식 $b^2<c$가 $t+b>0$을 보장해 주었던 것이다. $b^2=c$일 때는 약한 부등식 $t+b\geq 0$만 남고, 등호는 정확히 $x+b\leq 0$일 때 성립한다.

검산

- $b=0, c=1$이면 결과는 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C = \operatorname{arsinh} x + C$가 되어 잘 알려진 결과와 같다.
- 수치적으로, 임의의 b와 $c>b^2$에 대하여 임의의 구간에서 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 적분값은 로그 공식의 차와 10^{-7}보다 작은 오차로 일치한다. $b^2=c$이고 $b=1.3$일 때 $\int_{0.5}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{|x+b|}\approx 1.07992$이며, 이는 공식에서 얻은 $\ln\frac{5.3}{1.8}$과 일치한다.

흔한 실수

- $t+b>0$임을 알아차리지 못한 채 $\ln|t+b|$라고 써서, $b^2=c$일 때 무엇이 잘못되는지를 놓친다.
- 마지막 문항에서 $\sqrt{(x+b)^2}=x+b$라고 두어, $x+b<0$일 때의 실패를 완전히 가려 버린다.

STEP 너머

치환 $t=x+\sqrt{x^2+2bx+c}$는 **오일러 치환**(*Euler's substitutions*) 가운데 하나이다. 오일러(Euler) 치환은 x와 $\sqrt{ax^2+bx+c}$의 유리함수(rational function)의 적분을 모두 t의 유리함수의 적분으로 바꾸어 준다. 마지막 문항은 변수변환(change of variable)에서 새 변수가 옛 변수에 매끄럽고 일대일(one-to-one)로 의존해야 하는 이유를 보여 준다. t가 상수가 되면 이 방법은 무너진다. Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에는 이러한 가정을 엄밀하게 밝힌 변수변환 정리가 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.