풀이

STEP I 2008, 문제 13

확률과 통계 • 원순열

> **STEP I 2008, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q13

핵심 아이디어

원탁에서는 사람들 사이의 상대적인 위치만 의미가 있으므로, 한 사람의 의자를 고정하고 나머지 다섯 명을 그 주위에 배열한다. 그러면 $5! = 120$가지의 똑같이 일어날 법한(equally likely) 배열이 생기고, 모든 확률은 120가지 중 몇 가지인가를 세는 문제가 된다. 반드시 붙어 앉아야 하는 부부는 하나의 "묶음(block)"으로 붙여 생각할 수 있고, 이 묶음 안에는 두 가지 순서가 있다. "정확히"와 "하나도 없는" 경우는 직접 세거나, "k번째 부부가 붙어 앉는다"라는 사건(event)들에 대해 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)를 쓴다.

풀이

부부를 A, a; B, b; C, c라 하자. 모든 사람을 탁자 둘레로 한 자리씩 회전시켜도 서로에 대한 상대적인 배치는 같다. 그래서 A의 의자를 고정하고 나머지 다섯 명을 시계 방향으로 남은 의자에 차례로 앉힌다. 그러면 $5! = 120$가지 배열이 생기고, 이들은 모두 똑같이 일어날 법하다.

만약 의자에 번호를 붙인다면 배열은 $6! = 720$가지가 된다. 이때 각 상대적 배열은 A가 앉을 수 있는 의자마다 한 번씩, 모두 6번 나타나므로 확률은 같다.

유용한 일반적인 개수 세기: 원 둘레에 n개의 대상을 배열하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다(한 대상을 고정한 뒤 나머지를 순서대로 배열한다). 이를 원순열(circular arrangement)이라 한다.

소문항 (i)

모든 부부가 붙어 앉는다면, 각 부부를 하나의 묶음으로 붙인다. 그러면 탁자 둘레에 3개의 묶음이 있고, 이들을 배열하는 방법은 $(3-1)! = 2$가지이다. 각 묶음 안에서 남편은 아내의 어느 쪽에나 앉을 수 있으므로 $2^3 = 8$가지 선택이 있다. 따라서

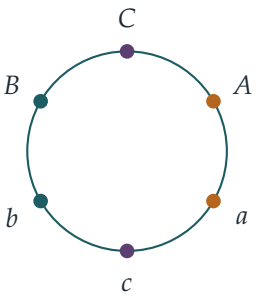
$$\mathrm{P}(\text{세 부부가 모두 붙어 앉음}) = \frac{2 \times 8}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

먼저 어느 부부가 붙어 앉지 **않는지** 고른다. 선택은 3가지이다. 그 부부를 C, c라 하면, A, a와 B, b는 붙어 앉고 C와 c는 붙어 앉지 않는다.

Aa와 Bb를 각각 묶음으로 붙인다. 이제 탁자 둘레에는 Aa, Bb, C, c의 4개 단위가 있고, 이들을 배열하는 방법은 $3! = 6$가지이다. C를 고정하고, 이 4개 단위로 이루어진 원에서 나머지 세 자리 중 c가 어디에 오는지 살펴보자. 그중 두 자리에서는 c가 C의 옆이고, 한 자리에서는 c가 정반대편이다. 따라서 6가지 배열 중 정확히 $6/3 = 2$가지에서 C와 c가 떨어져 앉는다. 이 경우에는 그림처럼 C와 c 사이의 두 빈 곳에 묶음이 하나씩 들어간다.



생각해 보기 왜 이것이 보기보다 간단할까?

C와 c가 마주 보고 있으면, 남은 자유는 어느 묶음이 어느 쪽에 앉는지(2가지)와 각 묶음 안의 순서($2 \times 2 = 4$가지)뿐이다. 따라서 배열은 $2 \times 4 = 8$가지이다. 떨어져 앉는 부부를 고르는 세 가지 경우를 모두 고려하면

$$\mathrm{P}(\text{정확히 두 부부가 붙어 앉음}) = \frac{3 \times 8}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

소문항 (iii)

$k = 1, 2, 3$에 대하여 E_k를 k번째 부부가 붙어 앉는 사건이라 하자. 각 유형의 배열이 120가지 중 몇 가지인지 센다.

- $|E_1|$: 1번 부부를 하나의 묶음으로 붙인다. 그러면 탁자 둘레에 5개 단위가 남으므로 배열은 $4! = 24$가지이고, 각각 묶음 안의 순서가 2가지이므로 48이다.
- $|E_1 \cap E_2|$: 두 묶음과 두 사람으로 4개 단위가 된다. 배열은 $3! = 6$가지이고, 묶음 안의 순서가 $2^2 = 4$가지이므로 24이다.
- 소문항 (i)에서 $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 16$이다.

대칭성에 의해 어느 부부를 고르든 같은 개수가 성립한다. 포함배제의 원리에 의해, 적어도 한 부부가 붙어 앉는 배열의 수는

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3(48) - 3(24) + 16 = 144 - 72 + 16 = 88.$$

따라서 어느 부부도 붙어 앉지 않는 배열은 $120 - 88 = 32$가지이고,

$$\mathrm{P}(\text{어떤 남편도 아내 옆에 앉지 않음}) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

생각해 보기 같은 개수들로부터 소문항 (ii)의 답을 바로 읽어 낼 수 있을까?

그렇다. 각 $|E_i \cap E_j|$는 정확히 i, j 두 부부만 붙어 앉는 배열과 세 부부가 모두 붙어 앉는 배열을 함께 센다. 따라서 정확히 두 부부가 붙어 앉는 배열의 수는 $3(24) - 3(16) = 24$이고, 이는 소문항 (ii)와 일치한다.

검산

- 네 가지 경우를 합하면 120가지 배열 전체가 되어야 한다. 정확히 한 부부가 붙어 앉는 배열의 수는 $3(48) - 2 \cdot 3(24) + 3(16) = 48$이고, $32 + 48 + 24 + 16 = 120$이다.
- 의자에 번호를 붙인 720가지 배치를 컴퓨터로 모두 나열하면, 붙어 앉는 부부가 $0, 1, 2, 3$쌍일 확률은 각각 $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$이다. 이는 위의 답과 일치한다.
- 타당성 점검: 어떤 아내의 양옆 두 사람은 5명 중에서 정해지므로, 남편이 그 옆에 앉을 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이는 $|E_1|/120 = 48/120$과 일치한다.

흔한 실수

- 전체 배열은 6!가지로 쓰면서 유리한 배치는 원순열로 세거나, 그 반대로 하는 것. 분자와 분모는 같은 약속을 따라야 한다.
- 각 묶음 안에서 두 사람의 순서에 대한 인수 2를 빠뜨리는 것.
- 소문항 (ii)에서 세 번째 부부까지 붙어 앉는 배열을 빼는 것을 잊는 것. 그러면 $\frac{3\times 24}{120} = \frac{3}{5}$가 되어 너무 크다.

STEP 너머

이것은 **메나주 문제**(*ménage problem*)의 축소판이다. 고전적인 메나주 문제에서는 남자와 여자가 번갈아 앉아야 한다는 조건도 있으며, 그 일반적인 답(Touchard의 공식)은 바로 이런 종류의 포함배제에서 나온다. 조건이 없는 우리 문제에서 부부가 n쌍이면, 붙어 앉는 부부 수의 기댓값(expected value)은 $n \cdot \frac{2}{2n-1} \to 1$이다. 어느 부부도 붙어 앉지 않을 확률은 유명한 교란순열(derangement)의 극한처럼 e^{-1}로 수렴(converge)한다. 남녀가 번갈아 앉는 메나주 문제에서는 이 확률이 e^{-2}로 수렴한다. 포함배제의 원리와 이런 극한은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 잘 다루어져 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.