풀이

STEP I 2008, 문제 11

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

> **STEP I 2008, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q11

핵심 아이디어

$\angle P_1OP_2$가 직각이므로 반지름(radius) OP_2는 P_1에서의 접선(tangent)과 평행하고, 반지름 OP_1은 P_2에서의 접선과 평행하다. 따라서 두 반지름 방향으로 힘을 분해하면, 각 방정식에는 수직항력(normal reaction) 하나와 마찰력(friction force) 하나만 나타난다. 여기에 두 수직항력의 모멘트가 모두 0인 점 O에 대한 모멘트(moment) 방정식을 더하고, 양 끝에서 한계 마찰(limiting friction) $F = \mu R$를 적용하면 세 방정식을 얻으며, 이로부터 α가 소거된다. 마지막 부분은 모습을 바꾼 배각 공식(double-angle formulae)이다.

풀이

모형과 힘

막대를 질량중심(centre of mass) G가 중점에 있는 균일한 강체(rigid body) 막대로, 고리는 질량이 없는 것으로 보고, 철사의 반지름을 a라 하자. 고리의 질량이 없으므로 철사가 각 고리에 작용하는 힘은 그대로 막대에 전달된다. 따라서 막대가 P_1과 P_2에서 철사에 닿아 있는 것으로 볼 수 있다. 양 끝에는 각각 반지름 방향의 수직항력과 접선 방향의 마찰력이 작용한다.

원점을 O로 하고, x축은 오른쪽, y축은 위쪽을 향하도록 좌표축을 잡으며, P_1이 철사의 최저점보다 왼쪽에 있도록 한다. $\angle P_1OP_2 = 90^\circ$이고 P_1이 아래쪽 연직선과 각 α를 이루므로, OP_2는 반대쪽에서 연직선과 각 $90^\circ - \alpha$를 이룬다.

$$P_1 = a(-\sin\alpha, -\cos\alpha), \qquad P_2 = a(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

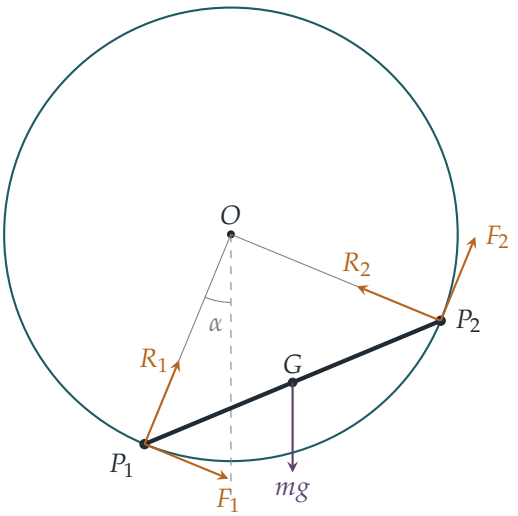
$0 < \alpha < 45^\circ$이므로 $\cos\alpha > \sin\alpha$이고, 따라서 실제로 P_1이 P_2보다 낮으며 두 점 모두 O보다 아래에 있다.

중점은 $G = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha, -\cos\alpha - \sin\alpha)$이고, 이는 O를 지나는 연직선의 **오른쪽**에 있다. 따라서 무게는 O에 대해 시계 방향의 모멘트를 가지며, 막대는 철사를 따라 시계 방향으로 미끄러지기 직전이다(P_2는 아래로, P_1은 위로 움직인다). 마찰력은 이를 방해하므로 양 끝 모두에서 **반시계 방향**으로 작용한다. 즉 P_1에서는 철사를 따라 아래로, P_2에서는 철사를 따라 위로 작용한다.

P_1과 P_2에서 O를 향하는 단위벡터(unit vector)를 각각 $\mathbf{u}_1$과 $\mathbf{u}_2$라 하자.

$$\mathbf{u}_1 = (\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad \mathbf{u}_2 = (-\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

P_1에서 반시계 방향의 접선 방향은 $-\mathbf{u}_2$이고, P_2에서는 $\mathbf{u}_1$이다. (O를 향하는) 수직항력을 R_1, R_2, 마찰력을 F_1, F_2라 하자.



평형 방정식

무게 mg는 연직 아래 방향으로 작용하므로, $\mathbf{u}_1$과 $\mathbf{u}_2$ 방향의 성분은 각각 $-mg\cos\alpha$와 $-mg\sin\alpha$이다.

$\mathbf{u}_1$ 방향(즉 P_1O 방향)으로 분해하자. R_1과 F_2가 기여하고, R_2와 F_1은 이 방향에 수직이다. 따라서

$$R_1 + F_2 = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

$\mathbf{u}_2$ 방향(P_2O 방향)으로 분해하자. R_2는 $+R_2$만큼 기여하고, $-\mathbf{u}_2$ 방향을 향하는 F_1은 $-F_1$만큼 기여한다. 따라서

$$R_2 - F_1 = mg\sin\alpha. \tag{2}$$

O에 대한 모멘트를 구하자. 수직항력은 O를 지난다. 각 마찰력은 O로부터 거리 a인 곳에서 접선 방향으로 작용하므로, 반시계 방향의 모멘트 aF_1과 aF_2를 준다. 무게는 O로부터 수평

거리 $\frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$인 곳에서 시계 방향으로 작용한다. 그러므로

$$F_1 + F_2 = \tfrac{1}{2}mg(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{3}$$

한계 마찰과 $\tan\alpha$

막대는 양 끝에서 미끄러지기 직전이므로 $F_1 = \mu R_1$, $F_2 = \mu R_2$이다. $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$로 쓰면 식 (1)과 (2)는

$$R_1 + \mu R_2 = mgc, \qquad -\mu R_1 + R_2 = mgs,$$

가 되고, 그 해는

$$R_1 = \frac{mg(c - \mu s)}{1 + \mu^2}, \qquad R_2 = \frac{mg(s + \mu c)}{1 + \mu^2}.$$

이다. μ가 작을 때(아래에서 보듯이 여기서는 반드시 그래야 한다) 둘 다 양수이므로, 수직항력은 그림처럼 실제로 O를 향한다. 이제 (3)은 $\mu(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}mg(c - s)$를 뜻하므로,

$$\begin{aligned} 2\mu(c - \mu s + s + \mu c) &= (1 + \mu^2)(c - s) \\ c\,(2\mu + 2\mu^2 - 1 - \mu^2) + s\,(2\mu - 2\mu^2 + 1 + \mu^2) &= 0 \\ s\,(1 + 2\mu - \mu^2) &= c\,(1 - 2\mu - \mu^2). \end{aligned}$$

$c\,(1 + 2\mu - \mu^2)$로 나누면(곧 보듯이 $c > 0$이고 $\tan\alpha > 0$이므로 μ가 작아야 하여, 이 값은 0이 아니다)

$$\tan\alpha = \frac{1 - 2\mu - \mu^2}{1 + 2\mu - \mu^2},$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

> **생각해 보기** 마찰력이 시계 방향이 아니라 반시계 방향으로 작용한다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

G가 O의 오른쪽에 있으므로 O에 대한 무게의 모멘트는 시계 방향이고, 수직항력은 O에 대한 모멘트가 없다. 따라서 마찰력만이 반시계 방향의 모멘트를 제공해야 하며, 마찰력이 없다면 막대는 시계 방향으로 미끄러질 것이다. 만약 마찰력을 반대 방향으로 그렸다면, μ 대신 $-\mu$가 들어간 같은 계산을 하게 되어 $\tan\alpha > 1$을 얻고, 이는 $\alpha < 45^\circ$에 모순이다.

막대의 각

P_1에서 P_2로 가는 벡터는 $a(\cos\alpha + \sin\alpha,\ \cos\alpha - \sin\alpha)$이고, 그 성분은 모두 양수이다. 따라서 막대가 수평과 이루는 예각 θ는

$$\tan\theta = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \tan(45^\circ - \alpha),$$

를 만족하고, $0 < 45^\circ - \alpha < 45^\circ$이므로 $\theta = 45^\circ - \alpha$이다.

이제 $\tan\alpha$의 식에 $\mu = \tan\lambda$를 대입하고 분자와 분모에 $\cos^2\lambda$를 곱하자.

$$\tan\alpha = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) - 2\sin\lambda\cos\lambda}{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + 2\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda} = \frac{1 - \tan 2\lambda}{1 + \tan 2\lambda} = \tan(45^\circ - 2\lambda).$$

$0 < \lambda < 22.5^\circ$이므로 각 $45^\circ - 2\lambda$는 α와 마찬가지로 0°와 45° 사이에 있다(양 끝 제외). 탄젠트 함수는 이 구간에서 일대일(one-to-one)이므로 $\alpha = 45^\circ - 2\lambda$이다. 그러므로

$$\theta = 45^\circ - \alpha = 2\lambda,$$

이고, 이것이 증명해야 할 내용이다. (이로써 조건 $\lambda < 22.5^\circ$, 즉 $\mu < \sqrt{2} - 1$의 의미도 설명된다. 이 조건은 정확히 $\tan\alpha > 0$이 되게 하는 조건이다.)

검산

- $\mu = 0$(매끄러운 철사)이면 $\tan\alpha = 1$이므로 $\alpha = 45^\circ$이고 막대는 수평이다. 이는 매끄러운 원 위의 막대가 정지할 수 있는 유일한 위치이다.
- $\mu = 0.2$이면 $\tan\alpha = 0.56/1.36$이므로 $\alpha \approx 22.38^\circ$이고 $\theta = 45^\circ - \alpha \approx 22.62^\circ$이며, 이는 $2\arctan 0.2 \approx 22.62^\circ$와 일치한다.
- 수치적으로, $\mu \in (0, \sqrt{2} - 1)$, a, m의 무작위 값 10^4개에 대해 이 R_1, R_2, F_1, F_2를 전체 벡터 방정식에 대입하면 합력(resultant force)과 모멘트가 (10^{-14} 정도의 오차로) 0이 되었고, $R_1, R_2 > 0$이며 $\theta = 2\lambda$였다.

흔한 실수

- 수평 방향과 연직 방향으로 분해하는 것. 이 방법도 통하지만, 그러면 모든 방정식에 네 힘이 모두 들어간다. 서로 수직인 두 반지름 방향으로 분해하는 편이 훨씬 깔끔하다.
- 한쪽 끝에서 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것. 두 고리는 원을 따라 같은 방향으로 미끄러지므로, 마찰력은 **양** 끝 모두에서 반시계 방향이다.
- $\theta = 45^\circ - \alpha$에 간단한 근거가 필요하다는 것을 잊는 것. 현은 $\angle P_1OP_2$의 이등분선에 수직이다.

STEP 너머

더 매끈한 기하학적 관점도 있다. 한계 마찰에서 각 끝의 전체 반력은 반지름과 각 λ를 이루고, 세 힘을 받아 평형(equilibrium) 상태에 있는 물체에서는 세 힘이 한 점에서 만나야

하므로, 곧바로 $\theta = 2\lambda$를 얻는다. 이 "마찰각(angle of friction)" 개념과, 마찰력이 등식이 아니라 부등식 $|F| \leq \mu R$라는 사실은, 여러 접촉점이 있어 어느 접촉점이 먼저 미끄러지는지 따져야 하는 정역학 문제의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 강체의 평형을 이처럼 세심하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.