풀이

STEP I 2008, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 2008, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q10

핵심 아이디어

중력은 연직 방향으로만 작용하므로 수평 속도 $V\cos\alpha$는 전혀 변하지 않고, 사거리(range)는 단순히 $V\cos\alpha$에 전체 비행 시간(time of flight)을 곱한 값이다. 비행 시간은 연직 운동만으로 정해지며, 연직 운동은 세 단계로 나뉜다. 아래층을 지나 올라가는 단계, 높이 h 위에서 머무는 단계, 그리고 다시 아래층을 지나 내려오는 단계이다. 각 단계는 등가속도(constant acceleration) 문제이고, 대부분의 일은 대칭성(symmetry)이 해 준다.

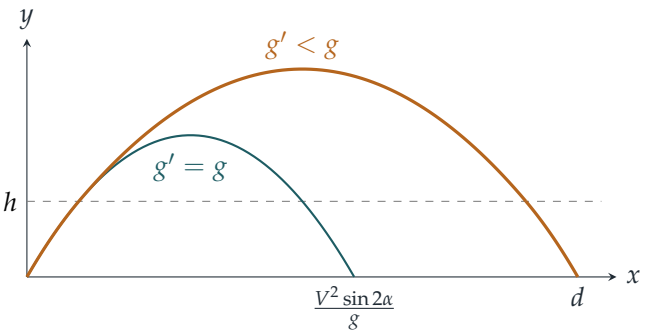
풀이

입자를 공기 저항(air resistance)이 없는 점으로 모형화하고, 평평한 지면 위의 연직 평면에서 움직인다고 하자. x축을 수평 방향, y축을 연직 위 방향으로 잡고, 원점을 발사 지점으로 한다.

개형 그리기

높이 h 아래에서는 두 궤적이 정확히 같은 방정식을 따르므로 그 구간에서 일치한다. 조건 $V^2\sin^2\alpha > 2gh$는 처음의 연직 운동 에너지(kinetic energy)가 가속도 g 아래에서 높이 h만큼 올라가기에 충분하다는 뜻이므로, 입자는 실제로 $y = h$ 위로 올라간다.

h 위에서 $g' < g$인 경우는 중력이 더 약하므로 연직 속력이 더 천천히 줄어든다. 따라서 입자는 더 높이 올라가고 그곳에서 더 오래 머물며, 더 납작하고 넓은 포물선(parabola)을 그린다. $y = h$에서 속도는 연속이므로(가속도만 갑자기 바뀐다) 두 호는 꺾인 점 없이 매끄럽게 이어지지만, 곡률(curvature)은 갑자기 바뀐다. 내려올 때 입자는 (위쪽 호의 대칭성에 의해) 아래층을 떠날 때와 같은 속력과 각도로 다시 아래층에 들어오고, 마지막 호는 첫 번째 호의 거울상이 된다. 따라서 $g' < g$인 경로가 더 먼 곳에 떨어진다.



사거리

처음 속도의 연직 성분은 $V\sin\alpha$이고, $y < h$인 동안 가속도는 $-g$이다.

1단계: 높이 h까지 올라가기. $y = h$에 도달할 때의 (위 방향) 연직 속력을 w라 하자. $v^2 = u^2 + 2as$에 의해

$$w^2 = V^2\sin^2\alpha - 2gh = \sin^2\alpha\left(V^2 - 2gh\,\mathrm{cosec}^2\alpha\right) = V'^2\sin^2\alpha,$$

이므로 $w = V'\sin\alpha$이다. 여기서 $\sin\alpha > 0$이고 입자가 아직 올라가는 중이므로 양의 제곱근을 택했다. (주어진 조건이 바로 V'이 양의 실수가 되게 하는 조건이다.) 걸린 시간은 $v = u + at$에 의해

$$t_1 = \frac{V\sin\alpha - V'\sin\alpha}{g} = \frac{(V - V')\sin\alpha}{g}.$$

이다.

2단계: 높이 h 위. 이제 입자는 $y = h$에서 출발하여 속력 w로 위로 움직이며, 가속도는 $-g'$이다. 입자는 $wt - \frac{1}{2}g't^2 = 0$일 때, 즉

$$t_2 = \frac{2w}{g'} = \frac{2V'\sin\alpha}{g'},$$

이 지난 뒤 $y = h$로 돌아오고, 이때 연직 속력 w로 아래로 움직이고 있다.

? **생각해 보기** 마지막 단계에 걸리는 시간이 왜 첫 단계와 같을까?

3단계에서 입자는 $y = h$에서 출발하여 속력 w로 아래로 움직이고, 아래 방향 가속도 g를 받으며 $y = 0$까지 떨어진다. 이것은 1단계를 시간을 거꾸로 돌려 진행한 것이다. 등가속도 운동은 가역적(reversible)이고, 1단계는 같은 가속도 아래에서 속력 $V\sin\alpha$로 $y = 0$을 출발하여 속력 w로 $y = h$에 도달했다. 따라서 입자는 시간 $t_3 = t_1$이 지난 뒤 연직 속력 $V\sin\alpha$로 지면에 닿는다. (직접 계산하면, 연직 속력이 비율 g로 w에서 $V\sin\alpha$까지 변하므로 $(V\sin\alpha - w)/g$만큼의 시간이 걸린다.)

따라서 전체 비행 시간은

$$T = 2t_1 + t_2 = 2\sin\alpha\left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right).$$

이다. 수평 방향의 힘이 없으므로 수평 속도는 내내 $V\cos\alpha$로 유지되고,

$$\begin{aligned} d = V\cos\alpha \cdot T &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) 2V\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) V\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$를 이용했다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $g' = g$이면 괄호 안은 V/g가 되고 $d = V^2\sin 2\alpha/g$이다. 이것은 지구에서의 익숙한 사거리이다.
- $g' < g$이면 $V'/g' > V'/g$이므로 d는 균일한 중력에서의 사거리보다 크다. 이는 개형과 일치한다.
- $V^2\sin^2\alpha = 2gh$가 정확히 성립하면 $V' = 0$이다. 입자는 $y = h$에 겨우 닿을 뿐 g'의 영향을 전혀 받지 않으며, 이때에도 $d = V^2\sin 2\alpha/g$이다.
- 수치로 확인하면, $V = 10$, $\alpha = 60°$, $g = 10$, $h = 2$, $g' = 5$일 때 $V' = \sqrt{140/3} \approx 6.83$이고 $d \approx 14.576$이다. 운동을 수치적으로 단계별 계산해도 상대 오차 10^{-5} 이내에서 같은 착지점을 얻는다. (이것이 개형에 사용한 값이다.)

흔한 실수

- 아래층을 지나 내려오는 단계를 빠뜨려서 $2t_1 + t_2$ 대신 $t_1 + t_2$를 얻는 실수.
- 높이 h에서의 연직 속력을 $V'\sin\alpha$가 아니라 V'으로 보는 실수. V'은 $\operatorname{cosec}\alpha$만큼 배율이 조정된 속력이지, 연직 성분 자체가 아니다.
- 호가 만나는 곳에 꺾인 점을 그리는 실수. 속도가 연속이므로 이음매는 매끄럽다.

STEP 너머

위치에 따라 달라지는 중력은 예외가 아니라 오히려 일반적인 경우이다. 실제 중력은 행성의 중심으로부터의 거리에 대해 $1/r^2$로 약해지며, 이때 포물체의 경로는 포물선이 아니라 타원(ellipse)의 호가 된다. 운동을 힘의 법칙이 간단한 영역들로 나누고 경계에서 위치

와 속도를 맞추는 것은 표준적인 기법으로, 입자의 굴절(refraction)이나 계단 퍼텐셜(step potential)을 다루는 양자역학(quantum mechanics)에서도 다시 쓰인다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 등가속도 운동의 도구들과 역제곱(inverse-square) 중력 아래의 궤도 운동을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.